

Řešení úloh regionálního kola 42. ročníku fyzikální olympiády.

Kategorie A

Autoři úloh: M. Jarešová (1), P. Šedivý (2), J. Houštěk (3,4)

- 1.a) Nechť u je konstantní velikost rychlosti klesání hladiny a v velikost okamžité rychlosti vody vytékající otvorem. Z rovnice kontinuity a Torricelliho vzorce pro výpočet rychlosti vytékající kapaliny plyne:

$$Su = \pi r^2 u = S_o v = S_o \sqrt{2gh}, \quad \pi^2 r^4 u^2 = S_o^2 2gh, \quad (1)$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{S_o^2 2gh}{\pi^2 u^2}} = C \sqrt[4]{h}. \quad (2)$$

Poloměr příčného průřezu nádoby je přímo úměrný čtvrté odmocnině z výšky průřezu nad otvorem ve dně. Konstanta úměrnosti

$$C = \sqrt{\frac{S_o \sqrt{2g}}{\pi u}} \quad (3)$$

závisí na plošném obsahu otvoru ve dně a na rychlosti, kterou má klesat hladina.

4 body

- b) Objem rotační nádoby můžeme vypočítat jako určitý integrál:

$$V = \int_0^H \pi r^2 dh = \pi C^2 \int_0^H \sqrt{h} dh = \frac{2\pi C^2 H^{\frac{3}{2}}}{3}. \quad \text{Z toho} \quad C = \sqrt{\frac{3V}{2\pi H^{\frac{3}{2}}}}. \quad (4)$$

Dosazením do (2) dostaneme:

$$R = \sqrt{\frac{3V}{2\pi H}} = 0,0892 \text{ m} \doteq 8,9 \text{ cm}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Porovnáním (3) a (4) dostaneme:

$$C^2 = \frac{S_o \sqrt{2g}}{\pi u} = \frac{S_o t \sqrt{2g}}{\pi H} = \frac{3V}{2\pi H^{\frac{3}{2}}},$$

$$S_o = \frac{3V}{2t\sqrt{2gH}} \doteq 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 = 3,43 \text{ mm}^2. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- 2.a) Těsně před dosažením horní polohy pístu je úbytek potenciální elastické energie pružiny roven přírůstkem potenciální tíhové energie a kinetické energie pístu a kuličky. Z toho určíme velikost v_1 rychlosti kuličky při opuštění pístu:

$$\frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 + (m + m_1)g(l_1 - l_0) = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l - l_1)^2,$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k[(l - l_0)^2 - (l - l_1)^2]}{m + m_1} - 2g(l_1 - l_0)} = 3,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Také výšku h výstupu kuličky nad píst určíme užitím zákona zachování energie:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 = mgh, \quad h = \frac{v_1^2}{2g} = 0,48 \text{ m}.$$

5 bodů

- b) Kdyby byl horní konec pružiny pevně spojen s pístem a kuličkou a pohyb pístu nebyl omezen zarážkou, rozkmital by se horní konec pružiny okolo rovnovážné polohy ve výšce $l - \Delta l = l - (m + m_1)g/k$ nad dnem nádoby (obr. R1). Zvolíme-li počátek vztažné soustavy v této rovnovážné poloze, jsou kmity popsány rovnicemi

$$y = -y_m \cos \omega t, \quad v = v_m \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m + m_1}} = 39,9 \text{ s}^{-1},$$

$$y_m = l - l_0 - \Delta l = 0,0838 \text{ m}, \quad v_m = \omega y_m = 3,34 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

V čase t_1 , kdy se pružina roztáhne na délku l_1 , je okamžitá výchylka

$$y_1 = -y_m \cos \omega t_1 = -(l - l_1 - \Delta l).$$

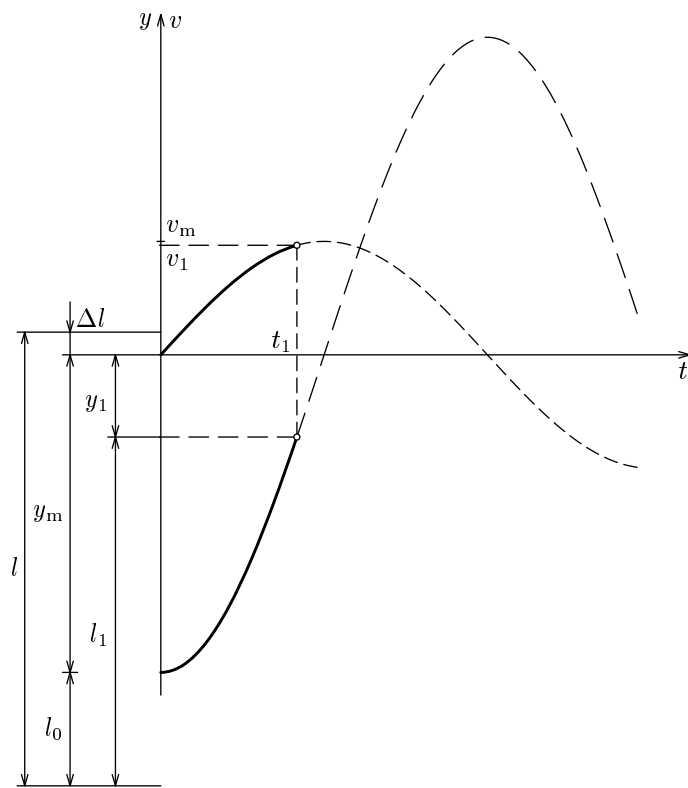
Z toho

$$\cos \omega t_1 = \frac{l - l_1 - \Delta l}{l - l_0 - \Delta l}, \quad \omega t_1 = 1,155 \text{ rad}, \quad t_1 = 0,029 \text{ s}.$$

5 bodů

Můžeme také zkontrolovat výsledek úkolu a):

$$v_1 = v_m \sin \omega t_1 = 3,06 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$



Obr. R1

- 3.a) Světlo do hranolu pronikne bez lomu a na rozhraní sklo – vzduch dopadá pod úhlem α . Mezní úhel pro toto rozhraní je přibližně 35° , světlo se tedy láme. Podle zákona lomu platí pro žluté a fialové světlo:

$$n_z \sin \alpha = \sin \beta_z, \quad n_f \sin \alpha = \sin \beta_f.$$

Z prvního vztahu vyjádříme β_z , do druhého dosadíme $\beta_f = \beta_z + \varphi_f$ a vyjádříme n_f :

$$n_f = \frac{\sin[\arcsin(n_z \sin \alpha) + \varphi_f]}{\sin \alpha} = 1,786 \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- b) Podle zadání platí $n_z = a + b/\lambda_z^2$ a $n_f = a + b/\lambda_f^2$. Odtud plyne

$$a = \frac{n_z \lambda_z^2 - n_f \lambda_f^2}{\lambda_z^2 - \lambda_f^2} = 1,705, \quad b = \frac{n_z - n_f}{\lambda_z^{-2} - \lambda_f^{-2}} = 1,62 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2,$$

$$n_c = a + \frac{b}{\lambda_c^2} = 1,738.$$

Odchylku opět určíme dosazením do zákona lomu:

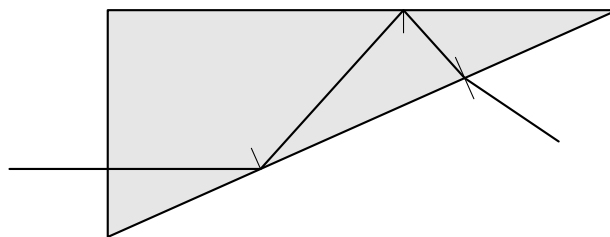
$$\varphi_c = \arcsin(n_c \sin \alpha) - \arcsin(n_z \sin \alpha) = -28'45'' \doteq 29'.$$

Záporné znaménko znamená, že úhel lomu červeného světla je menší než úhel lomu žlutého. $\mathbf{3 \text{ body}}$

- c) V tomto uspořádání dopadá světlo na rozhraní sklo vzduch nejprve pod úhlem $90^\circ - \alpha = 66^\circ$, což je více než mezní úhel, dochází tedy k totálnímu odrazu (obr. R2). Na dalším rozhraní světlo dopadne již pod menším úhlem $66^\circ - 24^\circ = 42^\circ$, stále tedy nedochází k lomu. Teprve na dalším rozhraní je úhel dopadu je úhel dopadu $42^\circ - 24^\circ = 18^\circ$ a lom nastane. Odchylky určíme stejně jako v b), pouze místo α dosadíme $\alpha' = 90^\circ - 3\alpha = 18^\circ$.

$$\varphi_f' = \arcsin(n_f \sin \alpha') - \arcsin(n_z \sin \alpha') = 43'22'' \doteq 43',$$

$$\varphi_c' = \arcsin(n_c \sin \alpha') - \arcsin(n_z \sin \alpha') = -18'17'' \doteq 18',$$



Obr. R2

$\mathbf{4 \text{ body}}$

- 4.a) Čtverec je tvořen čtyřmi úsečkami. Umístíme-li bod X do jeho středu, platí pro všechny úsečky v souladu s označením na obr. 5:

$$d = \frac{a}{2}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = 135^\circ, \quad \cos \alpha - \cos \beta = \sqrt{2}.$$

Indukce ve středu čtverce má velikost

$$B = 4 \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{\frac{a}{2}} \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}.$$

3 body

Ve středu kruhové smyčky o poloměru r je indukce $B' = \mu_0 I / (2r)$. Aby měl kruh stejný obvod jako čtverec o straně a , musí platit $r = 4a / (2\pi) = 2a / \pi$. Indukce jsou tedy v poměru

$$\frac{B'}{B} = \frac{\frac{\mu_0 I}{2 \frac{2a}{\pi}}}{\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16} \doteq 0,87.$$

Ve středu kruhu je o 13 % menší magnetická indukce než ve středu čtverce.

2 body

- b) Označme R odpor úseku délky a původního vodiče. Smyčka pak má odpor $3R/k$. Podle Kirchhoffových zákonů

$$(I - I_1)R = I_1 \frac{3R}{k}, \quad I_1 = \frac{k}{3+k} I.$$

2 body

- c) Proud $I - I_1$ tekoucí mezi kontakty M, N původním vodičem lze rozložit na proud I tekoucí doprava a proud I_1 tekoucí doleva. Magnetické pole ve středu smyčky je tedy složeno z magnetického pole ve středu čtvercového závitů o straně a , kterým prochází proud I_1 a pole ve vzdálenosti $a/2$ od dlouhého přímého vodiče, kterým prochází proud I . Aby výsledná indukce byla nulová, musí platit

$$\frac{2\sqrt{2}\mu_0 I_1}{\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \frac{a}{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \frac{I}{I_1} = 1 + \frac{3}{k},$$

$$k = \frac{3}{2\sqrt{2} - 1} = \frac{6\sqrt{2} + 3}{7} \doteq 1,64.$$

3 body