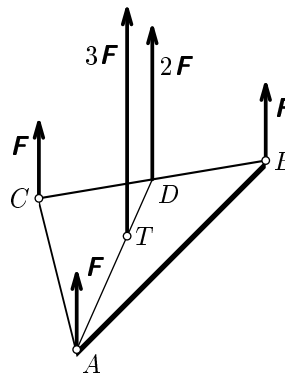


**Řešení úloh 1. kola 42. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A**

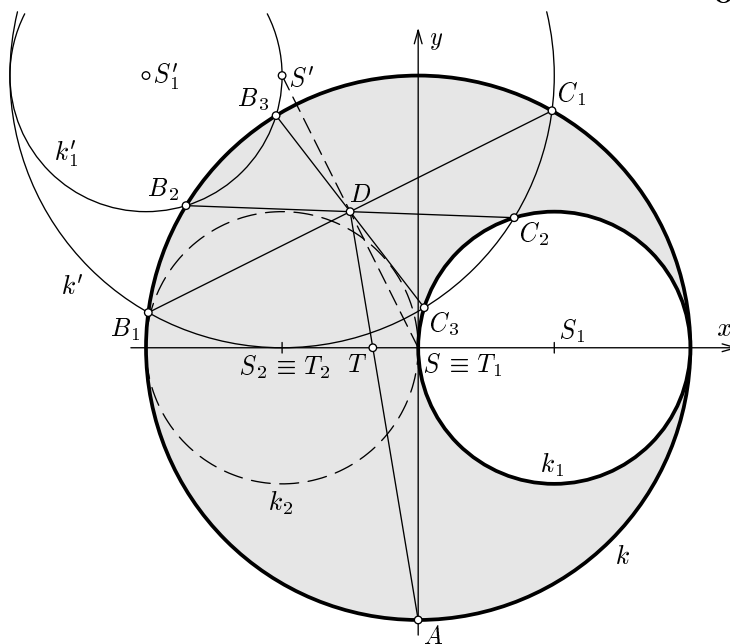
Autoři úloh: P.Šedivý (1, 6), B. Vybíral (7), J. Houštěk (5), L. Zdeborová (4),  
úlohy 2 a 3 jsou motivovány úlohami z časopisu Kvant.

1. Působí-li podpěry umístěné v bodech  $A, B, C$  na desku stejnými silami  $F_A = F_B = F_C = F$ , můžeme síly  $F_B$  a  $F_C$  nahradit jedinou silou  $F_D = 2F$  působící ve středu  $D$  úsečky  $BC$  (obr R1). Působíště výslednice sil  $F_A$  a  $F_D$  dělí úsečku  $AD$  v poměru 2 : 1. Je to těžiště trojúhelníka  $ABC$ , které musí být totožné s těžištěm desky. Grafické řešení úlohy je na obr. R2. Kružnice  $k_2$  rozdělí desku na dvě části o těžištích  $T_1 \equiv S$  a  $T_2 \equiv S_2$ , jejichž plošné obsahy jsou v poměru 2 : 1. Těžiště  $T$  celé desky je určeno vztahem

$$|ST| = \frac{|SS_2|}{3} = \frac{r}{6}.$$



Obr. R1



Obr. R2

Střed  $D$  úsečky  $BC$  leží na polopřímce  $AT$ , přičemž  $|AD| = 1,5|AT|$ . Jestliže bod  $B$  leží na kružnici  $k$ , musí bod  $C$  ležet na kružnici  $k'$  souměrně sdružené ke kružnici  $k$  podle bodu  $D$ , ale také na obvodu desky, tedy na kružnici  $k$  nebo  $k_1$ . Pokud bod  $C$

leží na kružnici  $k_1$ , musí bod  $B$  ležet na kružnici  $k'_1$  souměrně sdružené podle bodu  $D$ . Oba body  $B$  a  $C$  nemohou současně ležet na kružnici  $k_1$ , neboť bod  $D$  leží vně kružnice a nemůže tedy být středem její tětiny.

Grafickým řešením dostáváme tři dvojice bodů  $B_1C_1$ ,  $B_2C_2$  a  $B_3C_3$ .

**5 bodů**

Přesnou polohu hledaných bodů určíme početně. Vztažnou soustavu zvolíme podle obr. R2. Platí:

$$D \left[ -\frac{r}{4}, \frac{r}{2} \right], \quad S' \left[ -\frac{r}{2}, r \right], \quad S'_1 [-r, r],$$

$$k : \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad (1)$$

$$k' : \quad \left( x + \frac{r}{2} \right)^2 + (y - r)^2 = r^2, \quad (2)$$

$$k_1 : \quad \left( x - \frac{r}{2} \right)^2 + y^2 = \left( \frac{r}{2} \right)^2, \quad (3)$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2) dostaneme body  $B_1$  a  $C_1$ . Řešením soustavy rovnic (2), (3) dostaneme body  $C_2$  a  $C_3$ . Zbývající body  $B_2$  a  $B_3$  můžeme určit pomocí vztahu

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DB} \Rightarrow B = 2D - C.$$

Po dosazení:  $B_1[-0,992r, 0,129r]$ ,  $C_1[0,492r, 0,871r]$ ,  $B_2[-0,853r, 0,522r]$ ,  
 $C_2[0,353r, 0,478r]$ ,  $B_3[-0,522r, 0,853r]$ ,  $C_3[0,022r, 0,147r]$ .

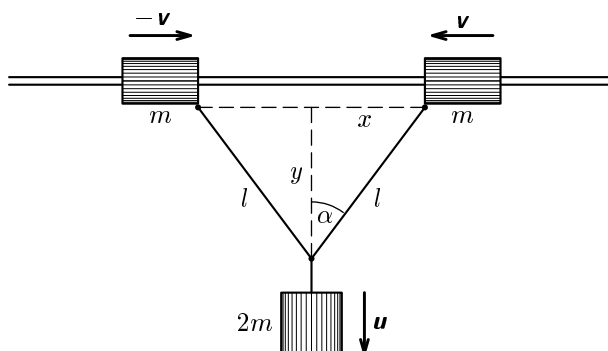
**5 bodů**

2. Označme rychlosti válců  $\mathbf{v}$ ,  $-\mathbf{v}$ , rychlost závaží  $\mathbf{u}$  a odchytku nitě od vertikály  $\alpha$  (obr. R3). Protože nit má stálou délku, musí mít vektory  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{u}$  stejně velké průměty do směru nitě:

$$v \sin \alpha = u \cos \alpha, \quad u = v \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i jiným postupem:

$$v = -\frac{dx}{dt}, \quad y = \sqrt{l^2 - x^2}, \quad u = \frac{dy}{dt} = \frac{-2x \frac{dx}{dt}}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{vx}{y} = v \operatorname{tg} \alpha. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$



Obr. R3

Válce jsou až do srážky působením nitě neustále urychlovány. Proto budou mít jejich rychlosti největší velikost  $v_m$  v okamžiku srážky. Ze vztahu (1) plyne, že velikost rychlosti závaží se před dosažením dolní polohy bude spojitě zmenšovat k nule. Ze zákona zachování energie odvodíme

$$2mgl = 2 \cdot \frac{1}{2} m v_m^2, \quad v_m = \sqrt{2gl}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

Během celého pohybu platí

$$2mgy = 2mgl \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} 2m u^2 = m u^2 \left( 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \right) = \frac{m u^2}{\sin^2 \alpha},$$

$$u^2 = 2gl \cos \alpha \sin^2 \alpha.$$

Užitím diferenciálního počtu zjistíme, že výraz dosahuje maxima pro

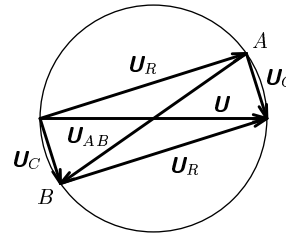
$$\sin^2 \alpha = \frac{2}{3}, \quad \cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}, \quad \alpha = 54,7^\circ$$

a maximální rychlost závaží má velikost

$$u_m = \frac{4gl}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{gl}{3\sqrt{3}}}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

3. a) V sériové větvi  $RC$  je napětí na rezistoru fázově posunuto o  $\pi/2$  proti napětí na kondenzátoru. Fázorový diagram celého obvodu na obr. R4 má tvar obdélníka. Proto  $U_{AB} = U = 240$  V.

3 body



Obr. R4

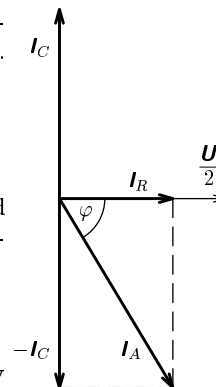
- b) Ampérmetrem prakticky zkratujeme body  $A$ ,  $B$  a obvod rozdělíme na dvě stejné části, na kterých bude stejné napětí  $U/2$ . Součástkami procházejí proudy

$$I_R = \frac{U}{2R} = 0,12 \text{ A}, \quad I_C = \frac{U}{2X_C} = \frac{U\omega C}{2} = 0,377 \text{ A}.$$

V uzlu  $A$  se proud  $I_R$  přicházející z rezistoru dělí na proud ampérmetru  $I_A$  a proud kondenzátoru  $I_C$ . Z fázorového diagramu na obr. R5 plyne

$$I_A = I_R - I_C, \quad I_A = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = 0,396 \text{ A}.$$

4 body



Obr. R5

- c) Proud procházející ampérmetrem je fázově opožděn za síťovým napětím o úhel  $\varphi = \arccos(I_R/I_A)$ . Wattmetr tedy bude ukazovat výkon

$$P = UI_A \cos \varphi = UI_A \frac{I_R}{I_A} = UI_R = 28,8 \text{ W}.$$

3 body

4. a) Zvolíme vztažnou soustavu spojenou s rotující nádobou (obr. R6). Hladina je v každém bodě kolmá k výslednici sil působících na částici taveniny — síly tíhové a setrvačné síly odstředivé. Ve vzdálenosti  $x$  od osy otáčení má tečná rovina sklon

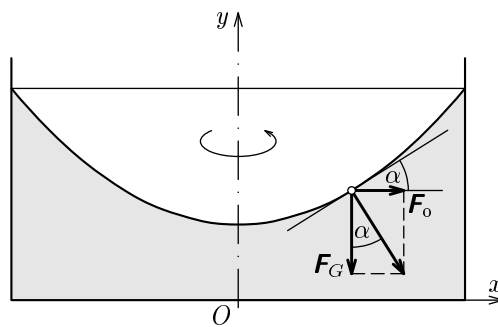
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_o}{F_G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}.$$

Integrací dostaneme rovnici meridiánu rotační plochy

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0,$$

což je rovnice paraboly. Její rotací vznikne rotační paraboloid.

Obr. R6



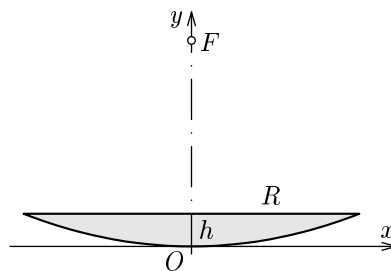
4 body

- b) Přemístíme-li počátek vztažné soustavy do vrcholu paraboloidu (obr. R7), zjednoduší se rovnice meridiánu na tvar

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2, \quad x^2 = \frac{2g}{\omega^2} y = 2py = 4fy,$$

kde  $p$  je poloparametr paraboly a  $f$  ohnisková vzdálenost. Z toho

$$\omega^2 = \frac{g}{2f}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{2f}{g}} = 10,8 \text{ s.}$$



Obr. R7  
3 body

- c) Výška parabolického vrchlíku o poloměru  $R$  je

$$h = \frac{R^2}{4f} = 0,292 \text{ m}$$

a jeho objem  $V = \int_0^h \pi x^2 dy = 4\pi f \int_0^h y dy = 2\pi f h^2 = \frac{\pi R^4}{8f} = 7,7 \text{ m}^3.$

3 body

5. a) Rychlost soukolí se postupně přibližuje k mezní hodnotě

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v = C = 0,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Derivujeme-li vztah pro  $v$ , dostaneme zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = kCe^{-kt}. \quad (1)$$

Směrnice tečny grafu v bodě  $t = 0$  je  $kC = \frac{C}{5 \text{ s}}$ . Z toho  $k = 0,2 \text{ s}^{-1}$ .

**2 body**

- b) V soukolí se indukuje napětí  $U_i = Blv$  orientované proti elektromotorickému napětí  $U_e$ . Obvodem prochází proud  $I = \frac{U_e - Blv}{R}$  a na soukolí působí magnetická síla  $F_m = BIl$ , která mu uděluje zrychlení

$$a = \frac{F_m}{m} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}v. \quad (2)$$

**2 body**

- c) Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme:

$$kCe^{-kt} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C(1 - e^{-kt}),$$

$$kCe^{-kt} = \frac{BlU_e}{mR} - \frac{(Bl)^2}{mR}C + \frac{(Bl)^2}{mR}Ce^{-kt}.$$

Aby tento vztah platil, musí být  $U_e = BlC$ ,  $k = \frac{(Bl)^2}{mR}$ .

Odtud již snadno dostáváme  $B = \frac{U_e}{Cl} = 138 \text{ mT}$ ,  $R = \frac{U_e^2}{mkC^2} = 1,89 \Omega$ .

**2 body**

- d) Ze vztahu pro  $v$  vyjádříme  $t$  a dosadíme:

$$t_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{C}{C - v_1} = 6,93 \text{ s}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}} \text{ Ze vztahu } F_m = BIl = ma \text{ plyne}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{m}{Bl}a = \frac{m}{Bl} \frac{dv}{dt}, \quad dQ = \frac{m}{Bl}dv.$$

V čase  $t = 0$  je  $v = 0$ ,  $Q = 0$ , Proto  $Q_1 = \frac{m}{Bl}v_1 = \frac{mCv_1}{U_e} = 22 \text{ mC}$ .

Ze zdroje byla odebrána energie  $E_1 = U_e Q_1 = mCv_1 = 240 \mu\text{J}$ .

**2 body**

- e) Kinetická energie soukolí je  $E_k = mv_1^2/2$ , účinnost je tedy

$$\eta = E_k/E_1 = v_1/2C = 37,5 \text{ \%}.$$

Zbývající část energie odebrané ze zdroje zvětšila vnitřní energii kolejnic a vozíku.

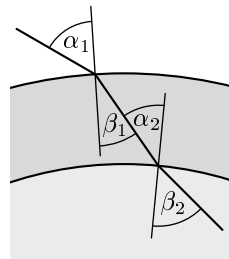
**1 bod**

6. Průchod paprsku stěnou válcové nádoby je znázorněn na obr. R8. Platí

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \alpha_2}{\sin \beta_2} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_3}{n_2} = \frac{n_3}{n_1},$$

kde  $n_1 \doteq 1$  je absolutní index lomu vzduchu,  $n_2$  je absolutní index lomu materiálu stěny a  $n_3 = n$  je absolutní index lomu měřené kapaliny. Je-li stěna velmi tenká, jsou kolmice dopadu prakticky rovnoběžné a platí

$$\beta_1 \doteq \alpha_2, \quad \frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_2} \doteq n.$$

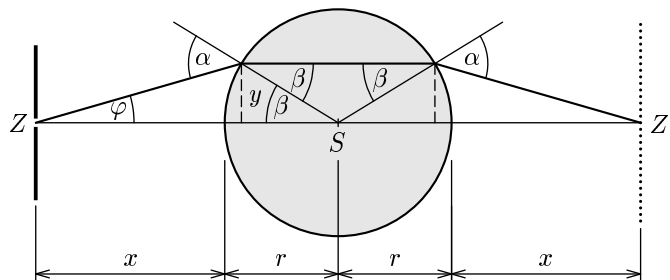


Obr. R8

Na indexu lomu materiálu stěny tedy nezáleží.

Odvození vztahu (1):

Vyjdeme z obr. R9. Platí  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ,  $\alpha = \beta + \varphi$ .



Obr. R9

Pro malé  $y$

$$\beta \doteq \sin \beta \doteq \frac{y}{r}, \quad \varphi \doteq \sin \varphi \doteq \frac{y}{x}, \quad n \doteq \frac{\alpha}{\beta} \doteq \frac{\frac{y}{r} + \frac{y}{x}}{\frac{y}{r}} = \frac{x+r}{x}.$$

Odvození vztahu (2):

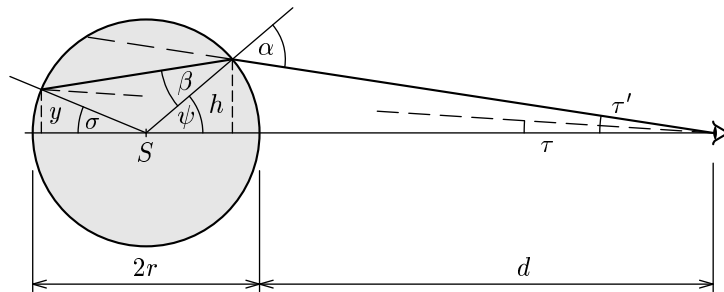
Vyjdeme z obr. R.10 Pro malé  $y$  a  $h$  platí

$$\tau' = \gamma \tau, \quad h \doteq d\tau' = \gamma \tau d \doteq \frac{\gamma y d}{d+2r},$$

$$\beta = \frac{\sigma + \psi}{2} \doteq \frac{y+h}{2r} \doteq \frac{y}{2r} \left( 1 + \frac{\gamma d}{d+2r} \right) = \frac{y}{2r} \cdot \frac{d+2r+\gamma d}{d+2r},$$

$$\alpha = \psi + \tau' \doteq \frac{h}{r} + \frac{h}{d} = \frac{(d+r)h}{rd} \doteq \frac{(d+r)\gamma y d}{(d+2r)rd} = \frac{(d+r)\gamma y}{(d+2r)r},$$

$$n \doteq \frac{\alpha}{\beta} \doteq \frac{2(d+r)\gamma}{2r+d+\gamma d}.$$



Obr. R10



7. a) 1. Pro dostředivé zrychlení protonu platí (viz studijní text – D2):

$$a_d = \frac{v^2}{r} = \frac{evB_p}{m}, \quad \text{kde} \quad m = \frac{m_p}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Z toho  $B_p = \frac{m_p v}{er \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 2,21 \text{ T} \doteq 2,2 \text{ T}$ . Při nerelativistickém řešení,

kdy bereme  $m = m_p$ , je

$$B_p' = \frac{m_p v}{er} = 2,09 \text{ T} \doteq 2,1 \text{ T}. \quad \mathbf{1 \text{ bod}}$$

2. Tok protonů představuje proud  $I = \tau v$ . Úsek  $AB$  (a rovněž úsek  $CD$ ) vyvolá v bodě  $O$  pole o indukci (viz studijní text)

$$B_l = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \beta_1 - \sin \beta_2), \quad \text{kde} \quad \sin \beta_1 = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta_2 = 0.$$

Čtvrtkruhový úsek vyvolá v bodě  $O$  magnetické pole o indukci (viz studijní text)

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{8r}.$$

Výsledná indukce  $B_{0p}$  v bodě  $O$  má opačný směr než  $B_p$  a velikost

$$B_{0p} = 2B_l + B_r = \frac{\mu_0 \tau v}{r} \left( \frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) = 1,3 \cdot 10^{-9} \text{ T}.$$

$$\frac{B_{0p}}{B_p} = \frac{\mu_0 \tau e}{m_p} \left( \frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 6,0 \cdot 10^{-10}.$$

$$\text{Při nerelativistickém řešení je} \quad \frac{B_{0p}}{B_p} = \frac{\mu_0 \tau e}{m_p} \left( \frac{2}{5\pi} + \frac{1}{8} \right) = 6,1 \cdot 10^{-10}.$$

Indukce  $B_{0p}$  je ve srovnání s  $B_p$  zanedbatelná.  $\mathbf{3 \text{ body}}$

3. Celková délka trajektorie a celkový náboj na ní jsou

$$L = 2l + \frac{\pi r}{2} = r \left( \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right), \quad Q = L\tau.$$

Z toho určíme počet protonů  $n_p = \frac{\tau L}{e} = \frac{\tau r}{e} \left( \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right)$ .

Relativistická kinetická energie všech protonů je

$$E_p = n_p E_{1p} = \frac{\tau r}{e} \left( \frac{8}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot m_p c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) =$$

$$= 2,4 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ eV}.$$

**3 body**

b) 1. Protože náboj jedné částice  $\alpha$  je  $2e$  a hmotnost  $m_\alpha \doteq 4m_p$ , je

$$B_\alpha \doteq 2B_p = 4,4 \text{ T}.$$

2. Protože počet částic je stejný a jedna částice  $\alpha$  má náboj  $2e$ , je délková hustota náboje  $\tau_\alpha = 2\tau$  a  $B_{0\alpha} = 2B_{0p} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ T}$ , a tedy

$$B_{0\alpha}/B_\alpha = B_{0p}/B_p.$$

3. Protože hmotnost  $m_\alpha \doteq 4m_p$  a počet částic i jejich rychlosti jsou stejné, je celková kinetická energie  $E_\alpha = 4E_p = 9,7 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ .

**3 body**