

Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Autoři úloh: R. Horáková (1,2,3,5,6,7), J.Kalčík (4)

1. Na počátku je kinetická energie míče E_{k0} , potenciální energie tíhová je mgh_0 . Další stavy míče shrneme do přehledu (potenciální energie tíhová je vztažena k podlaze):

Počáteční stav:	E_{k0}	mgh_0
Těsně před nárazem na strop:	E_{k1}	mgh
Těsně po odrazu od stropu:	E'_{k1}	mgh
Těsně před dopadem na podlahu:	E_{k2}	0
Těsně po odrazu od podlahy:	E'_{k2}	0
Konečný stav:	0	mgh_0

2 body

Ze zákona zachování energie a ze zadání plynou následující vztahy:

$$\begin{aligned}E_{k0} + mgh_0 &= E_{k1} + mgh, \\E'_{k1} &= (1 - k_s)E_{k1}, \\E_{k2} &= E'_{k1} + mgh, \\E'_{k2} &= (1 - k_p)E_{k2}, \\E'_{k2} &= mgh_0.\end{aligned}$$

5 bodů

Postupným dosazením a úpravou dostaneme:

$$mgh_0 = (1 - k_p) \left\{ mgh + (1 - k_s) \left[\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(h_0 - h) \right] \right\},$$

$$v_0 = \sqrt{2g \left(\frac{h_0}{(1 - k_p)(1 - k_s)} - \frac{h}{1 - k_s} + h - h_0 \right)}.$$

2 body

Po dosazení $v_0 \doteq 4,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1 bod

- 2.a) Má-li být v nejvyšším bodě trajektorie síla napínající vlákno nulová, musí zde těleso letět takovou rychlostí \mathbf{v} , aby k vyvolání dostředivé síly právě stačila síla tíhová:

$$F_d = \frac{mv^2}{d} = F_G = mg \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gd}. \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

Hladinu nulové potenciální energie volíme v místě počáteční polohy tělesa. Podle zákona zachování energie platí:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2mgd, \quad v_0^2 = gd + 4gd,$$

$$v_0 = \sqrt{5gd} \doteq 3,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- b) Při průchodu rovnovážnou polohou stálou je dostředivá síla výslednicí síly vlákna \mathbf{F}_t a tíhové síly \mathbf{F}_G . Platí:

$$F_d = \frac{mv_0^2}{d} = F_t - F_G, \quad F_t = F_d + F_G = m\frac{5gd}{d} + mg = 6mg \doteq 29 \text{ N}.$$

4 body

- 3.a) Zvolme vztažnou soustavu s počátkem v bodě O a vodorovnou souřadnicovou osou x . Těžiště tyče má souřadnici

$$x_T = \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

Soustava bude v rovnovážné poloze, bude-li splněna momentová věta

$$\left(\varrho_1 \frac{4}{3} \pi R^3 - \varrho_2 \frac{2}{3} \pi R^3 \right) g l_1 = m g \frac{l_2 - l_1}{2}.$$

3 body

Úpravou dostaneme:

$$\frac{2}{3} \pi R^3 (2\varrho_1 - \varrho_2) = \frac{m}{2} \left(\frac{l_2}{l_1} - 1 \right), \quad \frac{l_2}{l_1} = 1 + \frac{4\pi R^3 (2\varrho_1 - \varrho_2)}{3m}.$$

2 body

- b) Má-li být vlákno napnuto, musí platit

$$x_T > 0 \quad \Rightarrow \quad l_2 > l_1, \quad \rightarrow \quad \frac{l_2}{l_1} > 1, \quad \rightarrow \quad \varrho_1 > \frac{\varrho_2}{2}.$$

Pro $\varrho_1 = \frac{\varrho_2}{2}$ dostaneme $\frac{l_2}{l_1} = 1$. Tyč bude podepřena v těžišti a kulička se i bez působení vlákna vynoří polovinou svého objemu.

Pro $\varrho_1 < \frac{\varrho_2}{2}$ dostaneme $\frac{l_2}{l_1} < 1$, což nevyhovuje úloze. Kulička by se vynořila více než polovinou svého objemu a těžiště tyče by se nacházelo nad nádobou. To by vedlo k ohnutí vlákna a převrácení tyče na kouli.

3 body

- c) Pro hodnoty $\varrho_1 = 2\,700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $\varrho_2 = 1\,000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $R = 1,0 \text{ cm}$, $m = 32 \text{ g}$ lze dosáhnout vodorovné rovnovážné polohy tyče volbou

$$\frac{l_2}{l_1} \doteq 1,6$$

2 body

4.a) Počáteční hustotu vzduchu pod recipiencem určíme pomocí stavové rovnice:

$$\frac{p_0 V_0}{T} = \frac{m_0 R_m}{M_m}, \quad \varrho_0 = \frac{m_0}{V_0} = \frac{p_0 M_m}{T R_m} = 1,19 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

2 body

Během každého zdvihu se část vzduch přemístí do pracovního válce a hustota vzduchu se zmenší. Platí

$$\begin{aligned} \varrho_0 V_0 &= \varrho_1 (V_0 + V_1) \\ \varrho_1 V_0 &= \varrho_2 (V_0 + V_1) \\ &\vdots \\ \varrho_{n-1} V_0 &= \varrho_n (V_0 + V_1) \end{aligned}$$

Vynásobením všech rovnic a jednoduchou úpravou dostaneme:

$$\varrho_n = \varrho_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n. \quad (1)$$

Pro $n = 10$ je $\varrho_{10} = \varrho_0 \cdot 0,558 = 0,664 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3 body

Tlak vzduchu pod recipiencem souvisí s jeho hustotou a teplotou podle vztahu

$$p_0 = \frac{\varrho_0 T_0}{M_m}, \quad p_n = \frac{\varrho_n T_n}{M_m},$$

kde T_n je termodynamická teplota vzduchu na konci čerpání. Jestliže se teplota vyrovná s teplotou laboratoře ($T_n = T_0$), je konečný tlak

$$p_n = p_0 \frac{\varrho_n}{\varrho_0} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n. \quad (2)$$

Pro $n = 10$ je $p_{10} = 5,58 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

2 body

b) Hledaný počet zdvihů určíme řešením rovnice (2):

$$\frac{p_n}{p_0} = p_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + V_1} \right)^n, \quad \log \frac{p_n}{p_0} = n \log \frac{V_0}{V_0 + V_1},$$

$$n = \frac{\log \frac{p_n}{p_0}}{\log \frac{V_0}{V_0 + V_1}} = \frac{\log \frac{p_0}{p_n}}{\log \frac{V_0 + V_1}{V_0}}.$$

Pro $p_n < \frac{p_0}{100}$ dostaneme $n > 79,03$. Protože počet zdvihů musí být celé číslo, je řešením úlohy $n \geq 80$.

3 body

- 5.a) Moment třecí síly označíme M . Druhý pohybový zákon pro otáčivý pohyb zapíšeme ve tvaru:

$$M \Delta t = J\omega_1 - J\omega_2,$$

kde J je moment setrvačnosti otáčejícího se tělesa, ω_1 je úhlová rychlost na počátku doby Δt , ω_2 úhlová rychlost na konci této doby - v našem případě $\omega_2 = 0$.

$$M = J \frac{\omega_1}{\Delta t} = 2\pi f \cdot \frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{1}{\Delta t} = \frac{\pi f m r^2}{\Delta t}.$$

Pro dané hodnoty je velikost momentu třecí síly $M = 1,0 \text{ N} \cdot \text{m}$.

5 bodů

- b) Práce vykonaná setrvačником proti brzdící síle je rovna úbytku kinetické energie:

$$W = \frac{1}{2} J (\omega_1^2 - \omega_2^2), \quad \omega_2 = 0.$$

Úhlová dráha setrvačnika až do jeho zastavení je $\varphi = 2\pi n$. Setrvačnik vykoná práci

$$W = M\varphi = 2\pi n M.$$

Porovnáním obou vztahů dostaneme: $M = \frac{\pi m r^2 f^2}{2n} = 0,80 \text{ N} \cdot \text{m}$.

5 bodů

- 7.a) Ze stavové rovnice a obr. 3 plyne:

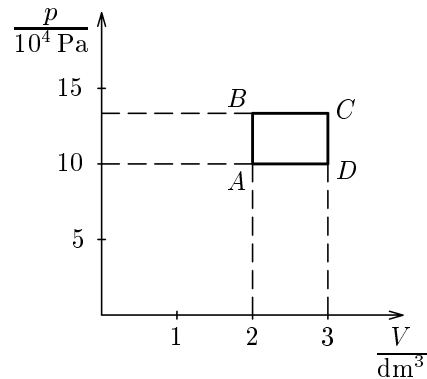
$$p_1 V_1 = n R_m T_{\min}, \quad p_2 V_2 = n R_m T_{\max}, \quad T_{\min} = T_A, \quad T_{\max} = T_C.$$

$$\frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} = \frac{T_{\max}}{T_{\min}}, \quad p_2 = p_1 \cdot \frac{V_1 T_{\max}}{V_2 T_{\min}} \doteq 1,33 \cdot 10^5 \text{ Pa} = p_B = p_C.$$

$$\frac{T_B}{T_A} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_C}{T_D}, \quad T_B = T_A \frac{p_2}{p_1} = 400 \text{ K}, \quad T_D = T_C \frac{p_1}{p_2} = 450 \text{ K}.$$

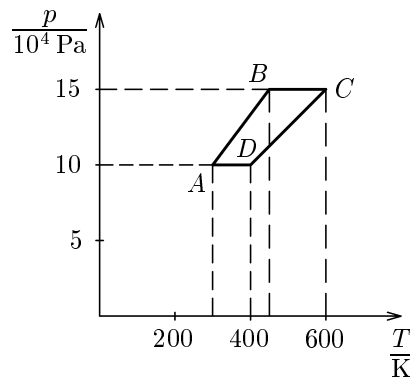
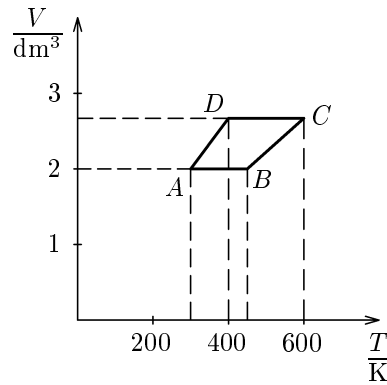
$$V_C = V_D = \frac{3}{2} V_1 = 3,0 \text{ dm}^3, \quad p_D = p_1 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

3 body



1 bod

b)



2 body

c) Během jednoho cyklu vykoná plyn práci

$$W' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) \doteq 33,3 \text{ J.}$$

1 bod

d) K určení účinnosti musíme znát dodané teplo

$$Q_1 = Q_{AB} + Q_{BC} = nC_V(T_B - T_{\min}) + nC_p(T_{\max} - T_B), \quad n = \frac{p_1 V_1}{R_m T_{\min}}.$$

$$Q = \frac{5}{2} \cdot \frac{p_1 V_1 (T_B - T_{\min})}{T_{\min}} + \frac{7}{2} \cdot \frac{p_1 V_1 (T_{\max} - T_B)}{T_{\min}} \doteq 633 \text{ J.}$$

$$\eta = \frac{W'}{Q_1} \doteq 5,3 \text{ \%}.$$

2 body

e) Účinnost Carnotova cyklu je $\eta_c = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}} = 50 \text{ \%} > \eta.$ 1 bod