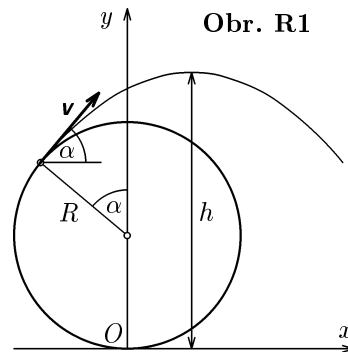


Řešení teoretických úloh celostátního kola 41. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: I. Košinár (1), P. Šedivý (2), B. Vybíral (3), J. Slabečius (4)

1. Pohyb kapek budeme popisovat z hlediska pozorovatele spojeného s vozidlem. Vztahnou soustavu zvolíme podle obr. R1. Opustí-li kapka pneumatiku v bodě určeném úhlem α , odletí ve směru tečny a koná šikmý vrh vzhůru s elevačním úhlem α a počáteční rychlostí, jejíž velikost je rovna obvodové rychlosti kola v . Pohyb kapky je popsán rovnicemi



$$x = vt \cos \alpha - R \sin \alpha ,$$

$$y = R(1 + \cos \alpha) + vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 .$$

V čase $t = \frac{v \sin \alpha}{g}$ dosáhne kapka vrcholu parabolické trajektorie o souřadnici

$$h = R(1 + \cos \alpha) + \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{2Rg}{v^2} + \frac{2Rg \cos \alpha}{v^2} + 1 - \cos^2 \alpha \right) . \quad (1)$$

3 body

Úpravou dostaneme

$$h = \frac{v^2}{2g} \left[\left(\frac{Rg}{v^2} + 1 \right)^2 - \left(\frac{Rg}{v^2} - \cos \alpha \right)^2 \right] . \quad (2)$$

Je-li splněna podmínka

$$\frac{Rg}{v^2} < 1 \quad \text{neboli} \quad v^2 > Rg , \quad (3)$$

bude mít funkce (2) pro $\cos \alpha = \frac{Rg}{v^2}$ maximální hodnotu

$$h_{\max} = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{Rg}{v^2} + 1 \right)^2 . \quad (4)$$

(Ke stejnému výsledku dojdeme nalezením extrému funkce (1) pomocí první derivace).

3 body

Platí

$$h_{\max} = R \left(\frac{Rg}{2v^2} + 1 + \frac{v^2}{2Rg} \right) > 2R,$$

neboť $\forall x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} : \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x} > 2$.

Pokud by platilo $v^2 \leq Rg$, funkce (2) by dosáhla maxima velikosti $2R$ pro $\alpha = 0$. Kapky by tedy nemohly překonat výšku $2R$, jak je požadováno v zadání úlohy.

Hledanou rychlost kola nalezneme řešením rovnice (4). Po úpravě:

$$v^4 + (2Rg - 2hg)v^2 + R^2g^2 = 0, \quad v^2 = g \left[(h - R) \pm \sqrt{(h - R)^2 - R^2} \right],$$

$$v = \sqrt{g \left[(h - R) + \sqrt{(h - R)^2 - R^2} \right]}.$$

(Znaménko (-) nevyhovuje podmínce (3).)

3 body

Pro dané hodnoty: $v = 5,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 20 \text{ km/h}$.

1 bod

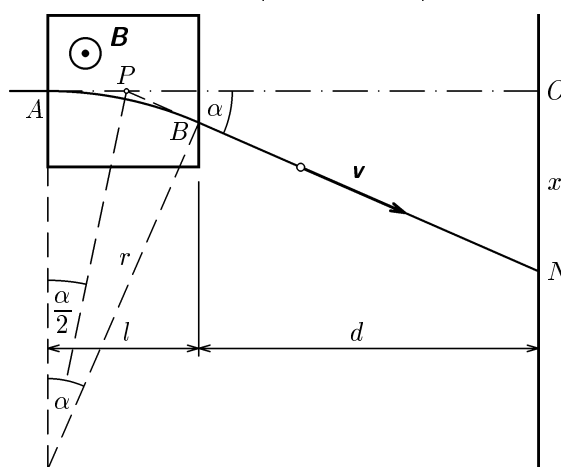
- 2.a) Působí-li pouze magnetické pole, pohybuje se iont podle obr. R2. Mezi pólovými nástavci na něj působí dostředivá magnetická síla $F_m = Bev = mv^2/r$, která zakřivuje jeho trajektorii do kruhového oblouku AB o poloměru

$$r = \frac{mv}{Be}$$

a odchýlí vektor rychlosti o úhel α , pro který platí $\sin \alpha = l/r$. Po opuštění magnetického pole se iont pohybuje po přímce procházející bodem P na ose o , pro který platí $|AP| = r \operatorname{tg}(\alpha/2)$, a dopadá na stínítko do bodu N o souřadnici

$$x = |OP| \operatorname{tg} \alpha \left(d + l - r \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Obr. R2



Připojíme-li na vychylovací destičky napětí, bude na iont kromě magnetické síly působit i síla elektrická, která mu udělí ve směru osy y zrychlení

$$a_y = \frac{F_e}{m} = \frac{Ee}{m}.$$

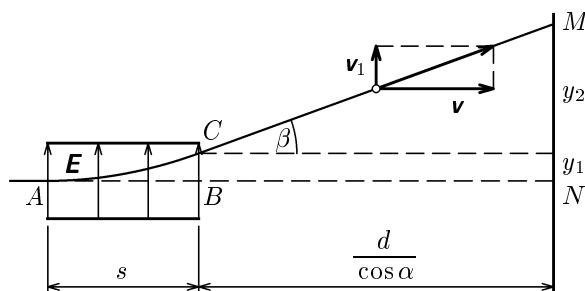
Pohyb iontu bude probíhat jako pohyb složený z výše popsaného rovnoměrného pohybu po kruhovém oblouku AB délky $s = r\alpha$ a z rovnoměrně zrychleného pohybu ve směru osy y . Za dobu t , po kterou bude iont mezi pólovými nástavci, posune se ve směru osy y a opustí elektrické a magnetické pole v bodě C o souřadnici y_1 . Přitom bude mít ve směru osy y rychlost v_1 . Za bodem C se bude pohybovat po přímce se sklonem β a dopadne na stínítko v bodě M , který je od bodu N posunut ve směru osy y do vzdálenosti $y = y_1 + y_2$.

Rozvineme-li svislou plochu, ve které leží trajektorie iontu, do roviny, dostaneme obr. R3. Platí:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{r\alpha}{v}, \quad v_1 = a_y t, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_1}{v}, \quad (2)$$

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad y_2 = \frac{d}{\cos \alpha} \operatorname{tg} \beta. \quad (3)$$

Obr. R3



Pro malé úhly můžeme použít aproximaci:

$$\sin \alpha = \frac{lBe}{mv} \doteq \alpha \doteq \operatorname{tg} \alpha \doteq 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \quad \cos \alpha \doteq 1.$$

Dosazením do (1) až (3) dostaneme přibližné vztahy

$$x \doteq \left(d + l - \frac{mv}{Be} \cdot \frac{lBe}{2mv} \right) \frac{lBe}{mv} = \left(d + \frac{l}{2} \right) \frac{lBe}{mv}, \quad (4)$$

$$t \doteq \frac{mv}{Be} \cdot \frac{lBe}{mv} \cdot \frac{1}{v} = \frac{l}{v},$$

$$y = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Ee}{m} \cdot \left(\frac{l}{v} \right)^2 + d \frac{\frac{Ee}{m} \cdot \frac{l}{v}}{v} = \left(d + \frac{l}{2} \right) \frac{lEe}{mv^2}. \quad (5)$$

5 bodů

Podle přibližných vztahů jsou souřadnice bodu M_1 dopadu iontů ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$:

$$x_1 = 0,0239 \text{ m} = 23,9 \text{ mm}, \quad y_1 = 0,0095 \text{ m} = 9,5 \text{ mm},$$

a souřadnice bodu M_2 dopadu iontů ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$:

$$x_2 = 0,0217 \text{ m} = 21,7 \text{ mm}, \quad y_2 = 0,0087 \text{ m} = 8,7 \text{ mm}.$$

2 body

Přesným numerickým výpočtem podle vztahů (1) až (3) dostaneme

pro iont ${}^{20}_{10}\text{Ne}^+$:

$$r = 0,20750 \text{ m}, \alpha = 0,145087 \text{ rad}, t = 6,021 \cdot 10^{-8} \text{ s}, \beta = 0,058034 \text{ rad}, \\ x = 0,0241 \text{ m}, y = 0,00968 \text{ m},$$

pro iont ${}^{22}_{10}\text{Ne}^+$:

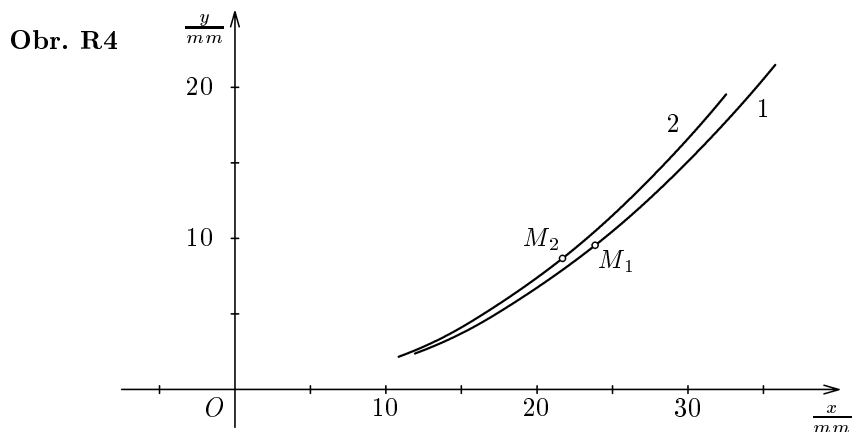
$$r = 0,22825 \text{ m}, \alpha = 0,131816 \text{ rad}, t = 6,017 \cdot 10^{-8} \text{ s}, \beta = 0,052726 \text{ rad}, \\ x = 0,0219 \text{ m}, y = 0,00878 \text{ m}.$$

- b) Rovnice (4) a (5) jsou vlastně přibližné parametrické rovnice hledané křivky. Parametrem je rychlost v . Vyloučením parametru dostaneme

$$y = \frac{mE}{\left(d + \frac{l}{2}\right) lB^2e} x^2 = \begin{cases} 16,8 \text{ m}^{-1} \cdot x^2 & \text{pro } {}^{20}_{10}\text{Ne}^+ \\ 18,4 \text{ m}^{-1} \cdot x^2 & \text{pro } {}^{22}_{10}\text{Ne}^+ \end{cases}$$

což jsou rovnice parabol. Ionty tedy na fotografické desce vytvoří přibližně oblouky parabol (obr. R4).

3 body



3.a) *První způsob:* Z Gaussovy věty:

$$2\pi r l E = \frac{Q_0}{\varepsilon} \Rightarrow E = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon r l}.$$

Napětí mezi elektrodami je:

$$U_0 = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{Q_0}{2\pi\varepsilon l} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

$$C = \frac{Q_0}{U_0} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 6,3 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 63 \text{ pF}.$$

Druhý způsob: Pokud neznáme Gaussovu větu, lze řešit jako soustavu sériově spojených kondenzátorů elementární tloušťky dr . Pro kapacitu C_r takového kondenzátoru na poloměru r platí (vychází se ze vzorce pro deskový kondenzátor):

$$\frac{1}{C_r} = \frac{dr}{\varepsilon S_r} = \frac{dr}{2\pi\varepsilon l r}.$$

Celková kapacita je dána součtem — integrálem:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\varepsilon l} \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

3 body

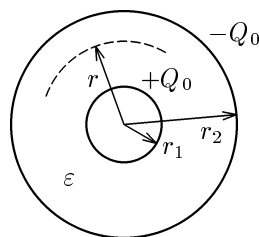
b) Prostor mezi elektrodami si lze představit jako vodič s proměnným příčným průřezem. Na poloměru r bude $S_r = 2\pi r l$. Element dielektrika má odpor

$$dR_i = \varrho \frac{dr}{S_r} = \varrho \frac{dr}{2\pi r l}.$$

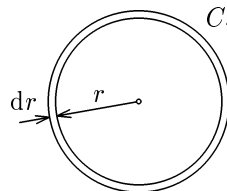
Výsledný odpor je

$$R_i = \frac{\varrho}{2\pi l} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\varrho \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l} = 4,7 \cdot 10^{10} \Omega = 47000 \text{ M}\Omega.$$

Obr. R5



Obr. R6



Ztrátový proud je

$$I_z = \frac{U_0}{R_i} = \frac{2\pi l U_0}{\varrho \ln \frac{r_2}{r_1}} = 2,6 \cdot 10^{-8} \text{ A} = 0,026 \text{ } \mu\text{A} .$$

3 body

c) Počáteční náboj

$$Q_0 = C U_0 = \frac{2\pi \varepsilon l U_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ C} .$$

Podle Ohmova zákona je $U = R_i I$, kde $U = Q/C$ je okamžité napětí (po odpojení od zdroje) a Q je okamžitý náboj. Proud I souvisí s úbytkem náboje a platí pro něj $I = -dQ/dt$.

$$\frac{Q}{C} = -R_i \frac{dQ}{dt}, \quad \text{Pak: } \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R_i C} dt = -\frac{dt}{\varrho \varepsilon},$$

neboť

$$R_i C = \frac{\varrho \ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi l} \frac{2\pi \varepsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \varrho \varepsilon .$$

Integrací od Q_0 do Q a od 0 do t dostaneme:

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -\frac{t}{\varrho \varepsilon}, \quad Q = Q_0 e^{-\frac{t}{\varrho \varepsilon}} .$$

V čase t_1 bude na kondenzátoru náboj

$$Q_1 = Q_0 e^{-\frac{t_1}{\varrho \varepsilon}} = 1,9 \cdot 10^{-8} \text{ C} .$$

4 body

- 4.a) Rovnováha plovoucí zkumavky v okamžiku přechodu do klesavého pohybu je dána rovnicí $F_G = F_v$,

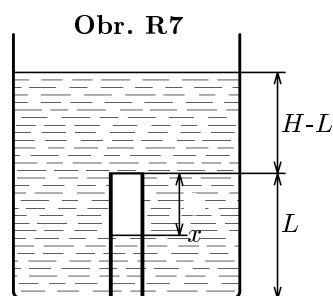
$$[m_{dna} + L(S_2 - S_1)\rho_s]g = [L(S_2 - S_1) + xS_1]\rho_v g.$$

Po zanedbání hmotnosti dna, dosazení a úpravě dostaneme:

$$x = L \left(\frac{D^2}{d^2} - 1 \right) \left(\frac{\rho_s}{\rho_v} - 1 \right) = 4,22 \text{ cm}.$$

3 body

- b) V horní poloze je tlak vzduchu ve zkumavce $p_1 = p_a + x\rho_v g$ při teplotě $t_1 = 15^\circ\text{C}$ ($T_1 = 288,15 \text{ K}$). Po klesnutí ke dnu se tlak vzduchu ve zkumavce zvětší a výška vzduchového sloupce se zmenší. Tím bude rovnováha mezi vztlakovou silou a tíhovou silou porušena. Obnoví se, když teplota soustavy stoupne na hodnotu t_2 , při které se výška vzduchového sloupce opět vrátí na hodnotu x . Tlak vzduchu ve zkumavce bude $p_2 = p_a + (H - L + x)\rho_v g$.



Proto

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_a + (H - L + x)\rho_v g}{p_a + x\rho_v g},$$

$$T_2 = T_1 \left(1 + \frac{(H - L)\rho_v g}{p_a + x\rho_v g} \right) = 292,4 \text{ K}, \quad t_2 = 19,2^\circ\text{C}.$$

Při dalším zvyšování teploty až do 25°C zkumavka vyplave nahoru a dno se nepatrně vynoří nad hladinu.

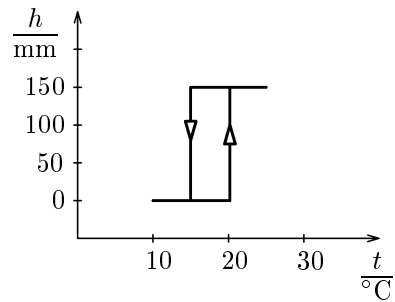
3 body

Bude-li teplota zvolna kolísat mezi 10°C a 25°C , klesne zkumavka ke dnu při každém poklesu teploty pod 15°C a opět se vrátí k hladině při každém vzrůstu nad $19,2^\circ\text{C}$. Výška h dolního konce zkumavky nad dnem se bude měnit podle grafu na obr. R8 mezi hodnotami 0 a $H - L = 150 \text{ mm}$. Vidíme, že v chování zkumavky se projevuje určité opožďování — *hystereze*.

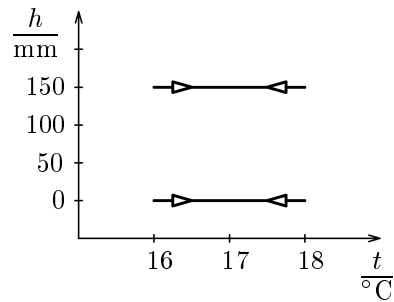
2 body

- c) Zmenší-li se kolísání teploty na interval od $16\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $18\text{ }^{\circ}\text{C}$, záleží na tom, jaký byl předcházející stav soustavy. Pokud byla předcházející teplota vyšší a zkumavka plavala u hladiny, bude setrvávat u hladiny. Jestliže však předcházející teplota byla nižší a zkumavka se nacházela u dna, bude setrvávat u dna. Bude tedy platit jeden z grafů na obr. R9.

2 body



Obr. R8



Obr. R9