

Řešení úloh 1. kola 41. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: I. Košinár (1), P.Šedivý (2, 3, 6), B. Vybíral (7);
úlohy 4 a 5 jsou motivovány úlohami z časopisu Kvant.

1. Zvolme rovinu horního okraje misky za hladinu nulové potenciální energie. Těžiště tyčinky se bude nacházet pod touto rovinou v hloubce

$$h = \left(2R \cos \alpha - \frac{L}{2}\right) \sin \alpha,$$

kde α je úhel sklonu tyčinky (obr. R1). Ten bude ve stabilní poloze takový, že potenciální energie tyčinky

$$E_p = -mgh = -mg \left(2R \cos \alpha - \frac{L}{2}\right) \sin \alpha$$

bude minimální. Musí tedy platit

$$\frac{dE_p}{d\alpha} = mg \left(2R \sin^2 \alpha - 2R \cos^2 \alpha + \frac{L}{2} \cos \alpha\right) = 0.$$

Úpravou dostaneme kvadratickou rovnici

$$4R \cos^2 \alpha - \frac{L}{2} \cos \alpha - 2R = 0.$$

Protože zřejmě $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, vyhovuje úloze pouze kořen

$$\cos \alpha = \frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{16R}. \quad (1)$$

Musíme ještě ověřit, že pro takto určený úhel α je potenciální energie minimální. Dalším derivováním a dosazením dostaneme:

$$\frac{d^2 E_p}{d\alpha^2} = mg \sin \alpha \left(8R \cos \alpha - \frac{L}{2}\right) = mg \sin \alpha \frac{\sqrt{L^2 + 128R^2}}{2} > 0.$$

Druhá derivace je kladná, potenciální energie dosahuje pro daný úhel lokálního minima.

4 body

Posudme ještě, pro které hodnoty L má daný výsledek smysl. Z podmínky $2R \cos \alpha > \frac{L}{2}$ dostaneme:

$$\frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{8} > \frac{L}{2}, \quad \text{po úpravě } L < 4R.$$

Z podmínky $2R \cos \alpha < L$ dostaneme:

$$\frac{L + \sqrt{L^2 + 128R^2}}{8} < L, \quad \text{po úpravě } L > \sqrt{\frac{8}{3}}R \doteq 1,63R.$$

Tyčinka se tedy může nacházet v stabilní šikmé poloze podle obr. 1, pokud $\sqrt{\frac{8}{3}}R < L < 4R$. Pro $L \leq \sqrt{\frac{8}{3}}R$ tyčinka sklouzne celá do misky a zaujme vodorovnou stabilní polohu.

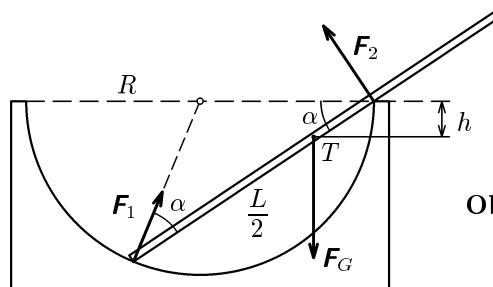
Také pro $\sqrt{\frac{8}{3}}R < L < 2R$ může tyčinka zaujmout vodorovnou stabilní polohu uvnitř misky.

3 body

V případech podle zadání jsou stabilní polohy:

- 1) Jediná rovnovážná poloha vodorovná uvnitř misky.
- 2) Dvě rovnovážné polohy — jedna vodorovná uvnitř misky a druhá šikmá s úhlem $\alpha \doteq 35^\circ$.
- 3) Jediná rovnovážná poloha šikmá s úhlem $\alpha \doteq 27^\circ$.

3 body



Obr. R1

Poznámka: K výsledku (1) lze také dojít řešením soustavy rovnic vyjadřujících podmínky rovnováhy:

$$\begin{aligned} F_1 \cos 2\alpha &= F_2 \sin \alpha, \\ F_1 \sin 2\alpha + F_2 \cos \alpha &= mg, \\ F_2 R \cos \alpha &= mg \frac{L}{2} \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{mgL}{4R}. \end{aligned}$$

- 2.a) Označme S plošný obsah příčného průřezu válce, S_1 plošný obsah otvoru, v výtokovou rychlost. Z rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice plyne:

$$S_1 v \cdot dt = -S \cdot dh, \quad \rho g h = \frac{1}{2} \rho v^2, \quad v = \sqrt{2gh},$$

$$S \cdot dh = -S_1 \sqrt{2gh} \cdot dt, \quad \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} \cdot dt.$$

3 body

Integrací dostaneme:

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{h^{\frac{1}{2}}} = \left[2h^{\frac{1}{2}} \right]_{h_0}^h = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} \int_0^t dt = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} \cdot t,$$

$$2h^{\frac{1}{2}} - 2h_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{S_1}{S} \sqrt{2g} \cdot t,$$

$$h = \left(h_0^{\frac{1}{2}} - \frac{S_1}{2S} \sqrt{2g} \cdot t \right)^2 = \left(h_0^{\frac{1}{2}} - \frac{r^2}{2R^2} \sqrt{2g} \cdot t \right)^2.$$

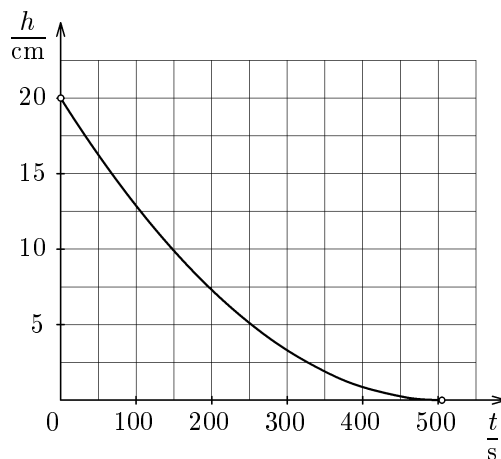
3 body

- b) Hladina klesne ke dnu v čase

$$t = \sqrt{\frac{h_0}{2g}} \cdot \frac{2R^2}{r^2} \doteq 505 \text{ s} = 8 \text{ min } 25 \text{ s}.$$

2 body

- c)



Obr. R2

2 body

- 3.a) Dioda propouští nabíjecí proud, když $u = U_m \sin \omega t > U_b$. Na počátku a na konci tohoto časového intervalu platí

$$\sin \omega t = \frac{U_b}{U_m} = \frac{U_b}{U\sqrt{2}} = 0,50283.$$

Řešením rovnice dostaneme:

$$\omega t_1 = 0,52687 \text{ rad}, \quad \omega t_2 = 2,61472 \text{ rad}, \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ s}^{-1},$$

$$t_1 = 0,00168 \text{ s}, \quad t_2 = 0,00832 \text{ s}.$$

Během jedné periody střídavého napětí prochází nabíjecí proud po dobu $t_2 - t_1 = 0,00664 \text{ s}$, což je 33,2 % periody.

3 body

- b) Během jedné periody střídavého napětí přijme akumulátor náboj

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{U_m \sin \omega t - U_b}{R} \, dt = \left[-\frac{U_m}{\omega R} \cos \omega t - \frac{U_b}{R} t \right]_{t_1}^{t_2},$$

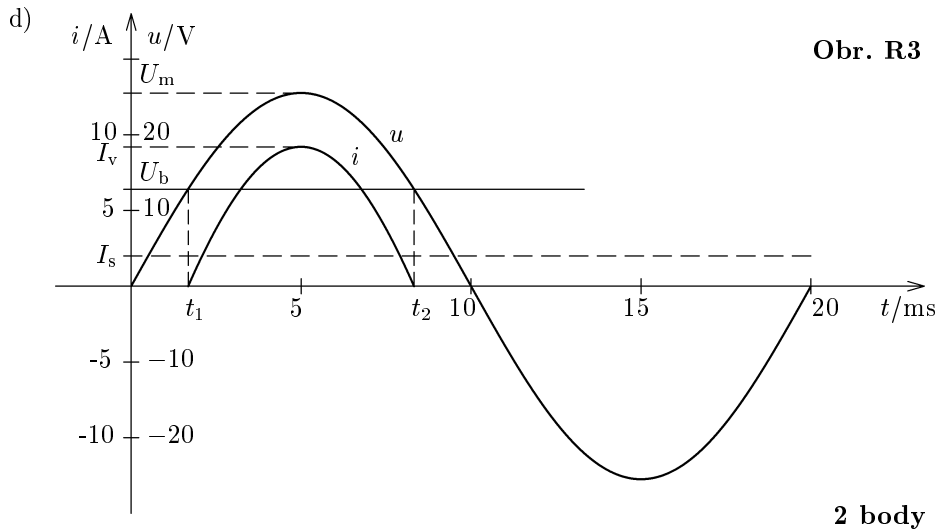
$$Q = \frac{U_m}{\omega R} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{R} (t_2 - t_1).$$

Střední hodnota nabíjecího proudu je $I_s = Q/T$. Z uvedených vztahů úpravou dostaneme

$$R = \frac{U_m}{\omega T I_s} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{T I_s} (t_2 - t_1) =$$

$$= \frac{U\sqrt{2}}{2\pi I_s} (\cos \omega t_1 - \cos \omega t_2) - \frac{U_b}{T I_s} (t_2 - t_1) = 1,38 \, \Omega. \quad \mathbf{4 \text{ body}}$$

- c) Nabíjecí proud má špičkovou hodnotu $I_v = \frac{U\sqrt{2} - U_b}{R} = 9,2 \text{ A}$. **1 bod**



- 4.a) Vyjděme z obr. R4. Paprsek přicházející na čočku ve vzdálenosti h od optické osy dopadá na kulovou plochu do bodu M pod úhlem α , láme se pod úhlem β , po průchodu čočkou svírá s optickou osou úhel $\beta - \alpha$ a protíná ji v bodě P . Platí

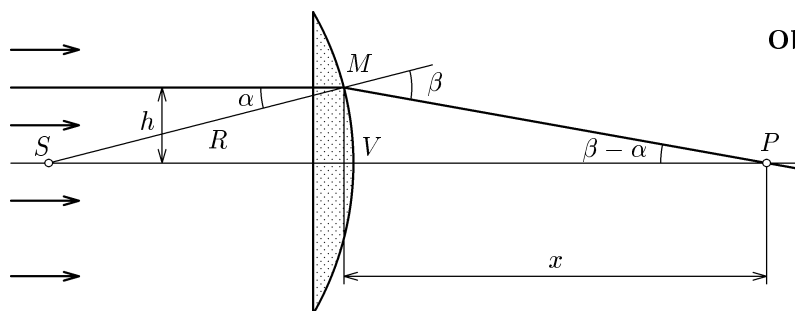
$$\sin \alpha = \frac{h}{R}, \quad \sin \beta = n \sin \alpha = \frac{nh}{R}, \quad x = \frac{h}{\operatorname{tg}(\beta - \alpha)}.$$

Pro $h \rightarrow 0$ můžeme psát

$$\alpha \doteq \frac{h}{R}, \quad \beta \doteq \frac{nh}{R}, \quad x \rightarrow x_0 = \frac{h}{\beta - \alpha} = \frac{R}{n - 1}.$$

Bod M přejde do vrcholu V kulového vrchlíku, bod P přejde do ohniska čočky F , které leží ve vzdálenosti x_0 od vrchlíku. Do této vzdálenosti také umístíme stínítko (obr. R4).

Pro dané hodnoty dostáváme $x_0 = 166,7$ mm.



Obr. R4

5 bodů

- b) Odstraníme-li clonu, dopadnou na stínítko nejdále od bodu F paprsky procházející čočkou u samé hrany (obr. R5). Vzdálenost ϱ hrany od optické osy určíme podle Eukleidovy věty pro výšku:

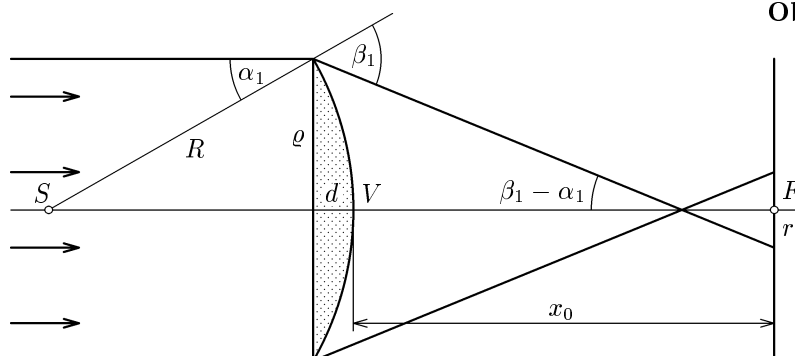
$$\varrho = \sqrt{(2R - d)d} = 31,23 \text{ mm}.$$

Tyto paprsky dopadají na kulovou plochu čočky pod úhlem

$$\alpha_1 = \arcsin \frac{\varrho}{R} = 18,195^\circ \text{ a lámou se pod úhlem } \beta_1 = \arcsin \frac{n\varrho}{R} = 29,974^\circ.$$

Stínítko protínají ve vzdálenosti r od optické osy:

$$r = (x_0 + d) \operatorname{tg}(\beta_1 - \alpha_1) - \varrho = 4,6 \text{ mm}.$$



Obr. R5

5 bodů

5.a) Výchozí předpoklady můžeme vyjádřit ve tvaru

$$P_e = UI = AT^4, \quad R = \frac{U}{I} = BT,$$

kde A , B jsou konstanty dané žárovky. Spojením obou vztahů dostaneme:

$$UI = AT^4 = A \left(\frac{U}{BI} \right)^4, \quad I^5 = \frac{A}{B^4} U^3, \quad I = \sqrt[5]{\frac{A}{B^4}} \cdot U^{\frac{3}{5}} = CU^{\frac{3}{5}},$$

kde C je opět konstanta dané žárovky.

3 body

b) Danou žárovkou prochází při jmenovitém napětí 230 V proud

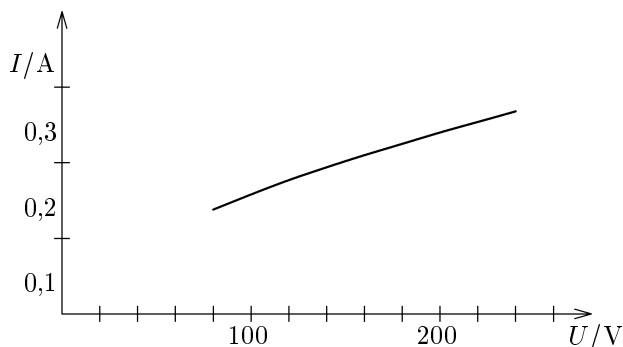
$I = \frac{60 \text{ W}}{230 \text{ V}} = 0,261 \text{ A}$. Z toho určíme číselnou hodnotu konstanty C :

$$C = \frac{I}{U^{\frac{3}{5}}}, \quad \{C\} = \frac{0,261}{230^{\frac{3}{5}}} = 0,00999$$

2 body

a připravíme tabulku pro sestrojení grafu:

U/V	80	100	120	140	160	180	200	220	240
I/A	0,138	0,158	0,177	0,194	0,210	0,225	0,240	0,254	0,268



Obr. R6

Pro malá napětí nejsou dostatečně přesně splněny předpoklady řešení, proto charakteristika začíná až u napětí 80 V.

2 body

c) Zářivé výkony při napětích $U_1 = 210 \text{ V}$ a $U = 230 \text{ V}$ jsou v poměru

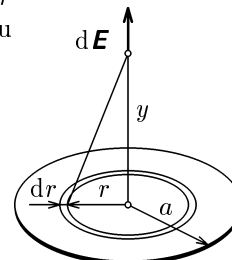
$$\frac{P_{e1}}{P_e} = \frac{U_1 I_1}{UI} = \frac{U_1}{U} \cdot \left(\frac{U_1}{U} \right)^{\frac{3}{5}} = \left(\frac{U_1}{U} \right)^{\frac{8}{5}} = 0,8645 \doteq 86 \%$$

Protože při poklesu napětí se sníží i povrchová teplota vlákna, spektrum žárovky se posune do infračervené oblasti a světelný tok poklesne na ještě méně než 86 %.

3 body

- 7.a) Element disku o poloměru r ($r \in \langle 0, a \rangle$) a šířce dr (obr. R7) má na ose disku ve vzdálenosti y od jeho středu elektrické pole o velikosti intenzity

$$\begin{aligned} |d\mathbf{E}| &= \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0(y^2 + r^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + r^2}} = \\ &= \frac{Qy}{2\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \frac{r dr}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$



Obr. R7

Integrací přes celý disk dostaneme

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \int_0^a \frac{r dr}{(y^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right).$$

Nad diskem je vektor intenzity orientován vzhůru, pod deskou dolů.

4 body

- b) Intenzita elektrického pole disku v místě tělíska:

$$E_l = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right) = \frac{Q(2 - \sqrt{3})}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Úhlové frekvence kmitů:

$$\omega_H = \sqrt{\frac{Q E_l - mg}{ml}} = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{3}} \left[\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2 m} (2 - \sqrt{3}) - g \right]},$$

$$\omega_D = \sqrt{\frac{1}{a\sqrt{3}} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a^2 m} + g \right)}.$$

4 body

- c) Aby ω_H bylo reálné a nenulové, musí platit:

$$\frac{Q^2(2 - \sqrt{3})}{4\pi\epsilon_0 a^2 m} - g > 0 \quad \text{neboli} \quad Q > 2a \sqrt{\frac{\pi\epsilon_0 mg}{(2 - \sqrt{3})}}.$$

2 body