

**Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie B**

Autoři úloh: V. Vícha(1,3,4,5), P. Šedivý (2,6,7)

1. Situaci znázorňuje obr. R1; čas měříme od okamžiku výstřelu. Pro pohyb tělesa platí:

$$x = 0, \quad y = b + v_1 t.$$

Pro pohyb střely platí:

$$x = a - v_2 t \cos \alpha, \quad y = v_2 t \sin \alpha.$$

V okamžiku zásahu jsou souřadnice tělesa i střely stejné:

$$\begin{aligned} a - v_2 t \cos \alpha &= 0 \\ v_2 t \sin \alpha &= b + v_1 t \end{aligned}$$

**5 bodů**

Vyloučením času a další úpravou dostaneme kvadratickou rovnici, ve které jako neznámá bude vystupovat  $\sin \alpha$ :

$$\begin{aligned} b v_2 \cos \alpha &= a(v_2 \sin \alpha - v_1), \\ (b^2 v_2^2 + a^2 v_2^2) \sin^2 \alpha - 2 a^2 v_1 v_2 \sin \alpha + a^2 v_1^2 - b^2 v_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{a^2 v_1 \pm b \sqrt{b^2 v_2^2 + a^2 v_2^2 - a^2 v_1^2}}{v_2 (a^2 + b^2)}.$$

Úloze vyhovuje kladný kořen  $\sin \alpha = 0,57315$ ,  $\alpha = 34^\circ 58'$ . Současně

$$\sin \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0,31623, \quad \beta = 18^\circ 26'.$$

Pušku tedy musíme „předsadit“ o úhel

$$\varepsilon = \alpha - \beta \doteq 16^\circ 30'.$$

**5 bodů**

2. a, b) Na cyklistu, který jede bez šlapání, má dynamický účinek pohybová složka tíhové síly a odpor vzduchu, pro který platí Newtonův vztah  $F_o = 0,5 \cdot C S \rho v^2$ , kde  $v$  je relativní rychlost tělesa vůči vzduchu. Po dosažení mezní rychlosti se účinky obou sil ruší. Za bezvětří

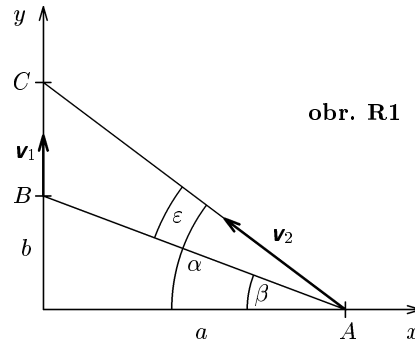
$$mg \sin \alpha = 0,5 \cdot C S \rho v_1^2 = K v_1^2.$$

$K = \frac{mg \sin \alpha}{v_1^2}$  je konstanta úměrnosti v Newtonově vztahu daná hustotou vzduchu, rozměry a tvarem cyklisty. Pro dané hodnoty  $K = 0,278 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . Při jízdě po větru

$$mg \sin \alpha = K(v_2 - v_v)^2,$$

při jízdě proti větru

$$mg \sin \alpha = K(v_3 + v_v)^2.$$



obr. R1

Porovnáním dostáváme

$$v_2 = v_1 + v_v, \quad v_3 = v_1 - v_v.$$

Pro dané hodnoty  $v_2 = 15,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 57 \text{ km/h}$ ,  $v_3 = 5,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 21 \text{ km/h}$ .

**3 body**

c) Při šlapání s kopce platí při rovnoměrném pohybu rychlostí  $v_4$

$$mg \sin \alpha + F_1 = K v_4^2 = \frac{mg \sin \alpha}{v_1^2} v_4^2, \quad F_1 = mg \sin \alpha \left( \frac{v_4^2}{v_1^2} - 1 \right),$$

kde  $F_1$  je velikost síly, kterou cyklista vyvinul šlapáním; pro dané hodnoty  $F_1 = 29,9 \text{ N}$ . Cyklista šlape s výkonem

$$P = F_1 v_4 = K v_4^3 - v_4 mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left( \frac{v_4^3}{v_1^2} - v_4 \right).$$

Pro dané hodnoty  $P = 449 \text{ W} \doteq 450 \text{ W}$ .

**3 body**

d) Při rovnoměrné jízdě do kopce rychlostí  $v_5$  musí cyklista vyvinout sílu o velikosti

$$F_2 = K v_5^2 + mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left( \frac{v_5^2}{v_1^2} + 1 \right)$$

a pro jeho výkon platí

$$P = F_2 v_5 = K v_5^3 + v_5 mg \sin \alpha = mg \sin \alpha \left( \frac{v_5^3}{v_1^2} + v_5 \right).$$

Dostáváme rovnici třetího stupně s neznámou  $v_5$ . Po dosazení číselných hodnot a numerickém řešení dostaneme  $v_5 = 8,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 31 \text{ km/h}$ .

**4 body**

3. a) Dusík je plyn s dvouatomovými molekulami. Proto  $M_m = 28 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ . Plyn měl počáteční objem

$$V_1 = \frac{m R_m T_1}{p_1 M_m} = 4,35 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 4,35 \text{ l}.$$

Izotermický děj:

$$T_2 = T_1 = 293 \text{ K}, \quad p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = 0,435 \text{ MPa},$$

Adiabatický děj:

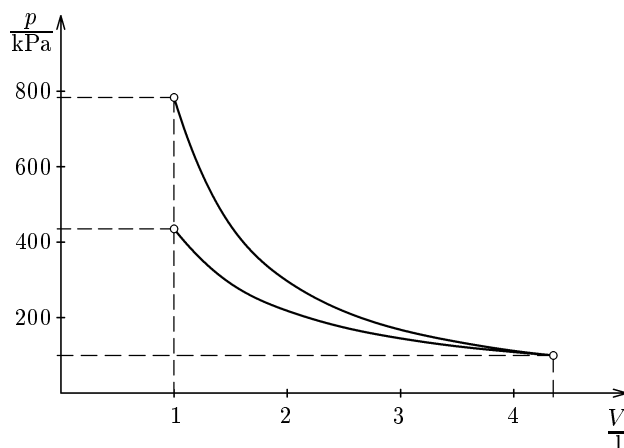
$$p_2 = p_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = 0,784 \text{ MPa}, \quad T_2 = \frac{T_1 p_2 V_2}{p_1 V_1} = 528 \text{ K}, \quad t_2 = 255 \text{ }^\circ\text{C}.$$

**3 body**

b)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Izotermický děj: } \{p\} = \frac{435}{\{V\}} \\ \text{Adiabatický děj: } \{p\} = \frac{784}{\{V\}^{1,4}} \end{array} \right\} V \dots \text{ v litrech, } p \text{ v kPa}$$

	$\frac{V}{T}$	4,35	4,00	3,50	3,00	2,50	2,00	1,50	1,00
izot.	$\frac{p}{\text{kPa}}$	100	109	124	145	174	218	290	435
adiab.	$\frac{p}{\text{kPa}}$	100	113	136	168	217	297	444	784



4 body

- c) Při izotermickém stlačení plyn spotřeboval práci

$$W_1 = p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 640 \text{ J}$$

Při adiabatickém ději plyn spotřeboval práci

$$W_2 = \Delta U = 2,5nR_m(T_2 - T_1) = 2,5 \frac{mR_m}{M_m}(T_2 - T_1) = 871 \text{ J}$$

Obě práce můžeme také číselně určit z obsahů ploch omezených grafy z úkolu b).

3 body

4. a) Frekvence základního tónu struny je vyjádřena vztahem

$$f_1 = \frac{v}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

Úpravou dostaneme

$$\sigma = 4l^2 f_1^2 \rho = 979 \text{ MPa}$$

3 body

- b) Při napínání struny dojde k jejímu prodloužení podle Hookova zákona

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{\Delta l}{l} E$$

Zahřátím se struna délky  $l$  prodlouží o  $\Delta_t l = l\alpha\Delta t$  a o tuto hodnotu se tedy zmenší deformace tahem. Napětí struny se zmenší na

$$\sigma' = \frac{\Delta l - \Delta_t l}{l} E = \sigma - E\alpha\Delta t = 979 \text{ MPa} - 26 \text{ MPa} = 953 \text{ MPa}$$

a frekvence struny poklesne na

$$f'_1 = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\sigma'}{\rho}} = 434 \text{ Hz}$$

7 bodů

5. a) Počáteční náboj na kondenzátoru A bude  $Q = C_A U$ . Po připojení k přepínači přejde část náboje na kondenzátor B:

$$Q = C_A U = Q_{A0} + Q_{B0} = (C_A + C_B) U_0, \quad U_0 = \frac{C_A U}{C_A + C_B} = 12 \text{ V}.$$

**1 bod**

- b) Vodiči projde náboj

$$Q_{B0} = C_B U_0 = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} U = 3,6 \mu\text{C}.$$

**1 bod**

- c) Vnitřní energie vodičů se zvětší o hodnotu, o kterou se zmenší elektrická energie kondenzátorů:

$$-\Delta E = \frac{1}{2} C_A U^2 - \left( \frac{1}{2} C_A U_0^2 + \frac{1}{2} C_B U_0^2 \right) = \frac{C_A C_B U^2}{2(C_A + C_B)} = 54 \mu\text{J}.$$

**2 body**

- d) Po přepnutí se spojí kladná deska jednoho kondenzátoru se zápornou deskou druhého. Tím se náboje částečně zneutralizují a celkový náboj se zmenší:

$$|Q_1| = |Q_{A0} - Q_{B0}|, \quad U_1 = \frac{|Q_1|}{C_A + C_B} = \frac{Q}{(C_A + C_B)^2} |C_A - C_B| = 2,4 \text{ V}.$$

**2 body**

- e) Po  $n$ -tém přepnutí bude platit:

$$U_n = \frac{|Q_n|}{C_A + C_B} = \frac{|C_A U_{n-1} - C_B U_{n-1}|}{C_A + C_B} = \frac{|C_A - C_B|}{C_A + C_B} U_{n-1}.$$

Dostáváme rekurentní vyjádření geometrické posloupnosti  $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$ , která má:

$$\text{multý člen } U_0 = \frac{C_A U}{C_A + C_B} \quad \text{a kvocient } q = \frac{|C_A - C_B|}{C_A + C_B}.$$

$n$ -tý člen posloupnosti je

$$U_n = U_0 q^n = \frac{C_A U}{C_A + C_B} \left( \frac{|C_A - C_B|}{C_A + C_B} \right)^n.$$

Při každém přepnutí se změní polarita napětí na kondenzátoru s menší kapacitou, zatímco na kondenzátoru s větší kapacitou je stále stejná.

**2 body**

f) Nerovnici

$$U_k > \frac{C_A U}{C_A + C_B} \left( \frac{|C_A - C_B|}{C_A + C_B} \right)^n$$

řešíme logaritmováním:

$$n > \frac{\log \frac{(C_A + C_B) U_k}{C_A U}}{\log \frac{|C_A - C_B|}{C_A + C_B}} \doteq 2,97.$$

Při třetím přepnutí už napětí klesne pod hodnotu  $U_k = 0,1 \text{ V}$ .

**2 body**

6. a) V zapojení podle obr. Y byly na diodě KY710 naměřeny hodnoty:

$t/^\circ\text{C}$	0	71,5
$u_D/\text{V}$	0,543	0,366

Úpravou vztahu (1) a dosazením dostáváme:

$$\gamma = \frac{U_0 - u_D}{t} = 2,48 \text{ mV/K}.$$

b) První operační zesilovač pracuje v lineárním režimu a na invertujícím vstupu se udržuje nulové napětí. Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu, že proud přicházející přes diodu je stejný jako proud odcházející přes rezistor  $R_1$ . Proto:

$$i_D = \frac{U_B}{R_1} = 1 \text{ mA} = \text{konst.} \quad u_{o1} = u_D = U_0 - \gamma t.$$

c) Také druhý operační zesilovač pracuje v lineárním režimu. Proto je napětí na invertujícím vstupu nulové a výstupní napětí  $u_{o2}$  je stejné jako napětí na rezistoru  $R_4$ . Z prvního Kirchhoffova zákona plyne pro uzel u invertujícího vstupu:

$$\frac{u_{o2}}{R_4} + \frac{u_{o1}}{R_1} = \frac{u_{o2}}{R_4} + \frac{U_0 - \gamma t}{R_1} = \frac{U_B}{R_3}, \quad u_{o2} = \frac{\gamma t R_4}{R_2} + \frac{U_B R_4}{R_3} - \frac{U_0 R_4}{R_2}.$$

Má-li současně platit  $u_{o2} = Bt$ , musí být:

$$R_3 = R_2 \frac{U_b}{U_0}, \quad R_4 = R_2 \frac{B}{\gamma}. \quad \text{Po dosazení: } R_3 \doteq 28 \text{ k}\Omega, \quad R_4 \doteq 40 \text{ k}\Omega.$$

Tyto výsledky ovšem bereme jen jako orientační a při praktické realizaci teploměru v úloze d) nastavíme  $R_3$  a  $R_4$  podle chování výstupního voltmetru.

7. Označme  $u^*$  výstupní napětí prvního operačního zesilovače, který funguje jako neinvertující zesilovač (obr. RB2). Platí tedy

$$u^* = u_{i1} \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right).$$

2 body

U druhého operačního zesilovače se vlivem zpětné vazby udržuje vstupní diferenciální napětí na zanedbatelné hodnotě. Napětí na invertujícím vstupu je proto prakticky stejné jako  $u_{i2}$ . Podle 1. Kirchhoffova zákona platí

$$\frac{u^* - u_{i2}}{R} = \frac{u_{i2} - u_o}{R_2}.$$

3 body

Vyloučením  $u^*$  a úpravou dostáváme

$$u_o = \left( 1 + \frac{R_2}{R} \right) u_{i2} - \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right) \frac{R_2}{R} u_{i1}.$$

Současně má platit

$$u_o = 10 (u_{i2} - u_{i1}).$$

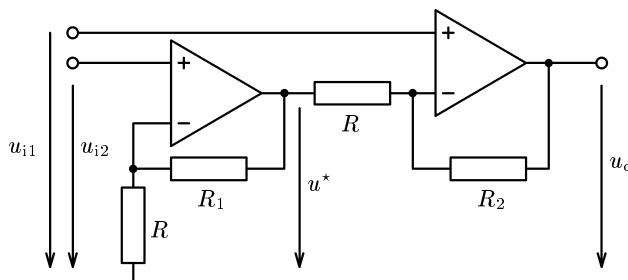
3 body

Porovnáním obou vztahů dostaneme

$$1 + \frac{R_2}{R} = 10, \quad R_2 = 9R = 90 \text{ k}\Omega,$$

$$\left( 1 + \frac{R_1}{R} \right) \frac{R_2}{R} = 9 \left( 1 + \frac{R_1}{R} \right) = 10, \quad R_1 = \frac{R}{9} = 1,11 \text{ k}\Omega.$$

2 body



Obr. R2