

Řešení teoretických úloh celostátního kola 40. ročníku fyzikální olympiády.

Autoři úloh: P. Šedivý (1), Z. Polák (2), B. Vybíral (3, 4)

- 1.a) Před připojením kondenzátoru prochází celým obvodem proud $I_1 = I_z$. Po připojení kondenzátoru prochází kondenzátorem proud o efektivní hodnotě

$$I_C = \frac{U_z}{X_C} = U_z \omega C = 0,0603 \text{ A},$$

který předbíhá proud žárovky o čtvrtinu periody. Efektivní hodnota proudu odebíraného z transformátoru se zvětší na

$$I_2 = \sqrt{I_z^2 + I_C^2} = 0,117 \text{ A}.$$

2 body

- b) Žárovku můžeme považovat za rezistor o odporu $R = \frac{U_z}{I_z} = 120 \Omega$.

Napětí v obvodu se rozdělí v poměru impedancí. Protože v obou případech je napětí na žárovce stejné, platí

$$\frac{U_z}{U} = \frac{|R|}{|R + j\omega L|} = \frac{\left| \frac{R}{j\omega C} \right|}{\left| \frac{R}{j\omega C} + j\omega L \right|}.$$

3 body

Po úpravě

$$\frac{R}{|R + j\omega L|} = \frac{R}{|R - \omega^2 RCL + j\omega L|}, \quad \implies \quad R = \pm(R - \omega^2 RCL).$$

Úloze vyhovuje záporné znaménko. Z toho:

$$\omega^2 CLR = 2R, \quad L = \frac{2}{\omega^2 C} \doteq 1,27 \text{ H}.$$

3 body

(Je zajímavé, že nezáleží na odporu žárovky. Kdybychom do obvodu zařadili jinou žárovku, svítila by v obou případech stejně.)

- c) Výpočet efektivní hodnoty U svorkového napětí transformátoru provedeme pro obvod bez kondenzátoru. Platí

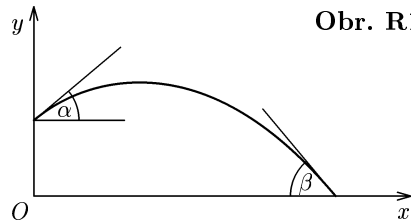
$$U = I_z \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 0,100 \text{ A} \cdot 416 \Omega = 41,6 \text{ V} \doteq 42 \text{ V}.$$

2 body

- 2.a) Počátek vztažné soustavy zvolíme v rovině dopadu pod počátečním bodem trajektorie (obr. R1). Poloha koule závisí na čase podle vztahů:

$$x = v_0 t \cos \alpha,$$

$$y = h + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$



Obr. R1

Vyloučením parametru t dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}, \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \operatorname{tg} \alpha \cdot x + h,$$

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg} \alpha \cdot x + h.$$

V bodě dopadu platí $y = 0$, tedy:

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \operatorname{tg} \alpha \cdot x + h = 0. \quad (1)$$

2 body

Na ose x je každý bod dosažitelný ze dvou elevačních úhlů, z jediného elevačního úhlu, nebo je nedosažitelný. Nejbližší je bod dosažitelný z jediného elevačního úhlu. V rovnici (1) můžeme za neznámou považovat úhel α a ptáme se, pro které x má tato rovnice jediné řešení. Po substituci $u = \operatorname{tg} \alpha$ dostáváme kvadratickou rovnici

$$-\frac{gx^2}{2v_0^2} u^2 + xu + h - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0.$$

Aby měla jediné řešení, musí platit

$$D = x^2 + \frac{4gx^2}{2v_0^2} \left(h - \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0, \quad \implies \quad x^2 v_0^4 + 2ghv_0^2 x^2 - g^2 x^4 = 0,$$

$$v_0^4 + 2ghv_0^2 = g^2 x^2 \quad \implies \quad x = \sqrt{\frac{v_0^4 + 2ghv_0^2}{g^2}} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gh}.$$

$$u = \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{2 \frac{gx^2}{2v_0^2}} = \frac{v_0^2}{gx} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

4 body

Pro dané hodnoty dostáváme: $x = 21,9$ m, $\operatorname{tg} \alpha = 0,91279$, $\alpha = 42^\circ 23'$.

1 bod

- b) Ze zákona zachování energie plyne, že rychlost tělesa v okamžiku dopadu má velikost $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$. Vodorovná složka rychlosti tělesa má stálou velikost $v_x = v_0 \cos \alpha$. Z toho pro úhel dopadu β plyne:

$$\cos \beta = \frac{v_x}{v} = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha.$$

α a β jsou úhly doplňkové a platí $\alpha + \beta = 90^\circ$. Numericky: $\beta = 47^\circ 37'$.

3 body

3.a) Z obr. R2 odvodíme pomocné vztahy:

$$h_1 = h \frac{r_1}{r_1 - r_2}, \quad m_1 = \frac{\pi h \rho_k}{3} \frac{r_1^3}{r_1 - r_2},$$

$$h_2 = h \frac{r_2}{r_1 - r_2}, \quad m_2 = \frac{\pi h \rho_k}{3} \frac{r_2^3}{r_1 - r_2}.$$

Hmotnost komolého kužele

$$m = m_1 - m_2 = \frac{\pi h \rho_k}{3} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2},$$

kde ρ_k je hustota kužele. Moment setrvačnosti kužele

$$J = \frac{3}{10} (m_1 r_1^2 - m_2 r_2^2) = \frac{3}{10} \frac{\pi \rho_k h}{3} \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1 - r_2}.$$

Porovnáním dostaneme

$$\frac{J}{m} = \frac{3}{10} \cdot \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}, \quad J = \frac{3}{10} m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = 195 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

4 body

b) Gyroskopický moment rotoru turbíny je

$$\mathbf{M}_g = J \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}_v,$$

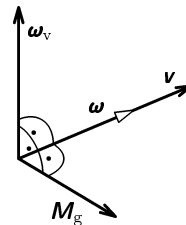
příčměž vektory $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}_v$ a \mathbf{M}_g jsou vzájemně na sebe kolmé (obr. R3).

Úhlová rychlost vlastní rotace má velikost $\omega = \frac{\pi n}{30}$.

Velikost gyroskopického momentu je

$$M_g = J \omega \omega_v = \frac{\pi J n \omega_v}{30} = 18\,400 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Obr. R3



3 body

Účinkem gyroskopického momentu \mathbf{M}_g se před lodí nepatrně nadzvedne a zád nepatrně ponoří.

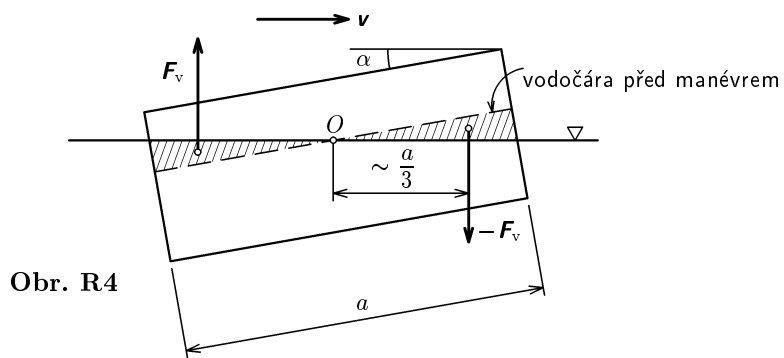
c) Celková vztlaková síla zůstane stejná, změní se jen její rozložení (obr. R4). Vztlaková síla na zádi se zvětší o F_v a na přídi se o tutéž hodnotu zmenší. Moment této dvojice bude v rovnováze s gyroskopickým momentem \mathbf{M}_g :

$$M_g = \frac{2F_v a}{3}, \quad \text{kde} \quad F_v = V \rho g = \frac{b a^2 \operatorname{tg} \alpha}{8} \rho g \doteq \frac{a^2 b \rho g}{8} \alpha.$$

Pak

$$\frac{2}{3} \frac{a^3 b \rho g}{8} \alpha = \frac{\pi J n \omega_v}{30}, \quad \alpha = \frac{2 \pi J n \omega_v}{5 a^3 b \rho g} = 1,15 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \doteq 24''.$$

3 body



4.a) Kinetická energie protonu je rovna elektrické práci. Podle klasické teorie:

$$\frac{1}{2}m_p v^2 = Ue \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_p}} = 7,830 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

1 bod

b) Ze stejného principu vychází i relativistický výpočet:

$$(m' - m_p)c^2 = Ue, \quad m' = \frac{m_p}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}} = m_p + \frac{Ue}{c^2}$$

$$v' = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_p}{m'}\right)^2} = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_p c^2}{m_p c^2 + Ue}\right)^2} = 7,828 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Relativní chyba výsledku v úkolu a): $\delta = \frac{v - v'}{v'} \cdot 100 \% = 0,026 \%$. Chyba je zanedbatelná. K výpočtu kinetické energie a hybnosti částic je možno v tomto případě s dostatečnou přesností použít klasické vzorce.

3 body

c) Přibližující se proton uvede odpudivou silou do pohybu částici α . V okamžiku největšího přiblížení bude rychlost obou částic stejná; označíme ji \mathbf{v}_1 . Při uvažovaném ději musí být splněn zákon zachování energie a zákon zachování hybnosti. Ve výchozí poloze mají částice tyto energie a hybnosti:

$$E_p = 0, \quad E_k = Ue + 0 = Ue, \quad \mathbf{p} = m_p \mathbf{v} + \mathbf{0} = m_p \mathbf{v}.$$

Při největším přiblížení částic bude:

$$E_{p1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \Delta_1} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 \Delta_1}, \quad E_{k1} = (m_p + m_\alpha) \frac{v_1^2}{2}, \quad \mathbf{p}_1 = (m_p + m_\alpha) \mathbf{v}_1.$$

Ze zákonů zachování energie a hybnosti dostáváme soustavu rovnic:

$$Ue = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0 \Delta_1} + (m_p + m_\alpha) \frac{v_1^2}{2},$$

$$m_p v = (m_p + m_\alpha) v_1, \quad \text{kde } v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_p}}$$

Řešením je:

$$\Delta_1 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{m_p + m_\alpha}{m_\alpha} \doteq \frac{5e}{8\pi\epsilon_0 U}$$

$$v_1 = \frac{m_p v}{m_p + m_\alpha} \doteq \frac{v}{5}.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta_1 = 1,127 \cdot 10^{-14}$ m, $v_1 = 1,574 \cdot 10^6$ m·s⁻¹.

4 body

d) Energie a hybnosti ve druhém stavu jsou:

$$E_{p2} = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\Delta_2}, \quad E_{k2} = \frac{1}{2}m_\alpha v_2^2, \quad \mathbf{p}_2 = m_\alpha \mathbf{v}_2.$$

platí opět zákony zachování:

$$Ue = \frac{e^2}{2\pi\epsilon_0\Delta_2} + \frac{m_\alpha v_2^2}{2},$$

$$m_p v = m_\alpha v_2, \quad \text{kde} \quad v = \sqrt{\frac{2Ue}{m_p}}$$

Řešením je:

$$\Delta_2 = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 U} \cdot \frac{m_\alpha}{m_\alpha - m_p} \doteq \frac{2e}{3\pi\epsilon_0 U}, \quad \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{m_\alpha^2}{m_\alpha^2 - m_p^2} \doteq \frac{16}{15},$$

$$v_2 = \frac{m_p}{m_\alpha} \doteq \frac{v}{5}, \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{m_p + m_\alpha}{m_\alpha} \doteq \frac{5}{4}.$$

Pro dané hodnoty: $\Delta_2 = 1,203 \cdot 10^{-14}$ m, $v_2 = 1,970 \cdot 10^6$ m·s⁻¹.

2 body