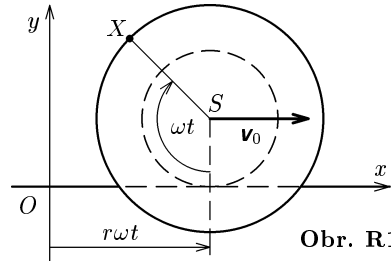


Řešení úloh 1. kola 40. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie A

Autoři úloh: M. Krebs(1), D. Klivanec (4), Z. Polák(2), P.Šedivý(3,6), B. Vybíral (5,7)

1. a) Pohyb válce s kolem je složen z rovnoměrného posuvného pohybu a z rovnoměrného otáčivého pohybu s úhlovou rychlostí $\omega = \frac{v_0}{r}$. Za dobu t se osa válce posune do vzdálenosti $r\omega t = v_0 t$ a válec se pootočí o úhel ωt . Souřadnice bodu X budou podle obr. R1 určeny vztahy:



Obr. R1

$$x = r\omega t - R \sin \omega t, \quad y = r - R \cos \omega t. \quad (1)$$

2 body

- b) Derivací vztahů (1) dostaneme:

$$v_x = r\omega - R\omega \cos \omega t, \quad v_y = R\omega \sin \omega t. \quad (2)$$

Velikost rychlosti bodu X závisí na čase podle vztahu

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(r\omega - R\omega \cos \omega t)^2 + (R\omega \sin \omega t)^2} = \\ &= \omega \sqrt{(R^2 + r^2) - 2Rr \cos \omega t}. \end{aligned} \quad (3)$$

V nejnižších bodech trajektorie, kde $\cos \omega t = 1$, je rychlost bodu X nejmenší:

$$v_{\min} = \omega(R - r) = v_0 \frac{R - r}{r} = 3,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4)$$

V nejvyšších bodech trajektorie, kde $\cos \omega t = -1$, je rychlost bodu X největší:

$$v_{\max} = \omega(R + r) = v_0 \frac{R + r}{r} = 13,33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (5)$$

2 body

- c) Bod X se pohybuje dopředu, jestliže

$$v_x > 0 \quad \Rightarrow \quad \cos \omega t < \frac{r}{R} = 0,6.$$

V základním intervalu to platí pro $53,13^\circ < \omega t < 306,87^\circ$. Doby pohybu vpřed a vzad jsou ve stejném poměru jako příslušné úhly otočení:

$$t_{\text{vpřed}} : t_{\text{vzad}} = 253,74 : 106,26 \doteq 5 : 2.$$

1 bod

d) Souřadnice vektoru zrychlení dostaneme derivováním vztahů (2):

$$a_x = R\omega^2 \sin \omega t, \quad a_y = R\omega^2 \cos \omega t. \quad (6)$$

Zrychlení má konstantní velikost $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2$ a v každém okamžiku má opačný směr než vektor \vec{SX} , to znamená, že vždy míří do středu kola.

1 bod

e) V nejnižších a nejvyšších bodech trajektorie je zrychlení kolmé k rychlosti. Mění proto jen směr vektoru rychlosti a platí vztah pro výpočet dostředivého zrychlení:

$$a = \frac{v^2}{\varrho} \Rightarrow \varrho = \frac{v^2}{a}, \quad (7)$$

kde ϱ je poloměr oskulační kružnice. Pro nejnižší body trajektorie dosazením z (4) dostaneme:

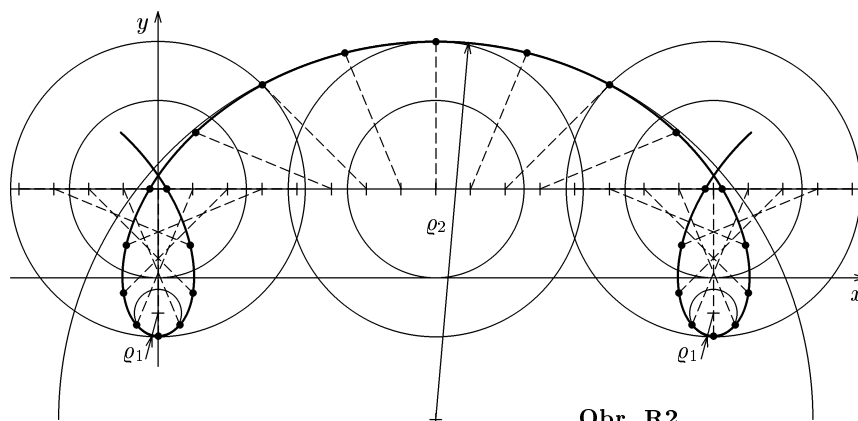
$$\varrho_1 = \frac{v_{\min}^2}{a} = \frac{\omega^2(R-r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R-r)^2}{R} = 0,08 \text{ m}.$$

Pro nejvyšší body trajektorie dosazením z (5) dostaneme:

$$\varrho_2 = \frac{v_{\max}^2}{a} = \frac{\omega^2(R+r)^2}{\omega^2 R} = \frac{(R+r)^2}{R} = 1,28 \text{ m}.$$

2 body

f) Při sestrovování jednotlivých bodů trajektorie vycházíme ze stejného principu jako v úloze a). Oblouky oskulačních kružnic mohou trajektorii nahradit s dostatečnou přesností v okolí nejvyšších a nejnižších bodů (obr. R2).



Obr. R2

2 body

2. a) Počátek vztážné soustavy zvolíme v místě, odkud házíme. Pohyb kamene je popsán parametrickými rovnicemi:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Vyloučením času dostaneme neparametrickou rovnici trajektorie:

$$y = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (8)$$

Je to rovnice paraboly procházející počátkem vztážné soustavy. Bod dopadu má souřadnice

$$y = 0, \quad x = \frac{v_0^2}{g} 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Souřadnice vrcholu jsou:

$$x = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha = h \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$y = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = h \cdot \sin^2 \alpha,$$

kde h je výška vrhu pro $\alpha = 90^\circ$ (svislý vrh vzhůru s počáteční rychlostí v_0). Tyto vztahy budeme chápat jako parametrické rovnice křivky, kde parametrem je úhel α . Umocněním první rovnice a dosazením z druhé rovnice parametr odstraníme:

$$x^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = 4y(h - y)$$

a po úpravě dostaneme:

$$x^2 + 4y^2 - 4hy + h^2 = h^2, \quad \frac{x^2}{h^2} + \frac{4\left(y - \frac{h}{2}\right)^2}{h^2} = 1.$$

To je rovnice elipsy se středem $S \equiv \left[0, \frac{h}{2}\right]$, s hlavní poloosou o velikosti h ve směru osy x a s vedlejší poloosou o velikosti $\frac{h}{2}$ ve směru osy y .

3 body

- b) Každým bodem uvnitř oblasti zasažitelné kamenem, jehož počáteční rychlost má velikost v_0 , procházejí dvě parabolické trajektorie. Vztah (8) můžeme upravit na tvar

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot x^2,$$

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + y + \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0.$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici s neznámou $\operatorname{tg} \alpha$ a parametry x , y , v_0 , g . Jejím řešením nalezneme příslušné elevační úhly.

Bodem, který leží na hranici zasažitelné oblasti, prochází jen jediná trajektorie.

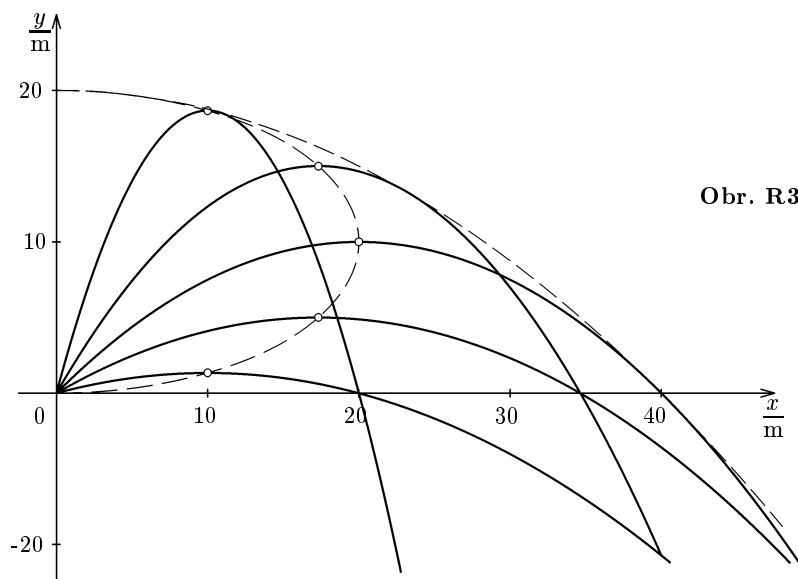
Pro ně je diskriminant rovnice nulový:

$$D = x^2 - \frac{2gx^2}{v_0^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0, \quad \text{po úpravě} \quad y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Hranici zasažitelné oblasti tvoří parabola s vrcholem $V \equiv \left[0, \frac{v_0^2}{2g}\right] = [0, h]$, která protíná osu x v bodě $D = \left[\frac{v_0^2}{g}, 0\right] = [2h, 0]$.

4 body

c)



Obr. R3

3 body

3. a) Paprsky přicházející do oka pozorovatele jsou prakticky rovnoběžné s rovinou určenou středem oka a osou trubice. Vzdálenost y paprsku, který zobrazuje obrys vnitřní části trubice, od této roviny určíme podle obr. R4:

$$y = R \sin \alpha = Rn \sin \beta = Rn \frac{r}{R} = nr.$$

Zdánlivý průměr vnitřní části trubice je $d' = 2y = nd$. Pro daný index lomu $d' = 1,52d$. Řešení má ovšem smysl, pokud $nr < R$. Není-li tato podmínka splněna, rozhraní mezi kapalinou a sklem nevidíme a trubice je zbarvena až po vnější obrys.

4 body

- b) Okraj čáry je ve vzdálenosti h (polovina tloušťky čáry) od roviny určené středem oka a osou tyče. Paprsek zobrazující okraj čáry vystupuje z tyče ve vzdálenosti h' od této roviny (obr. R5). Platí:

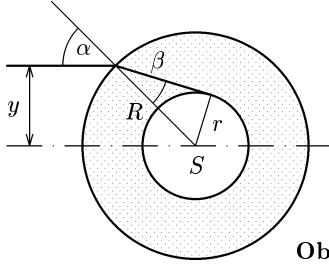
$$h' = R \sin \alpha, \quad h = R \sin \varphi, \quad \varphi = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\beta) = 2\beta - \alpha.$$

Je-li tloušťka čáry malá, jsou malé i úhly α , β a můžeme psát:

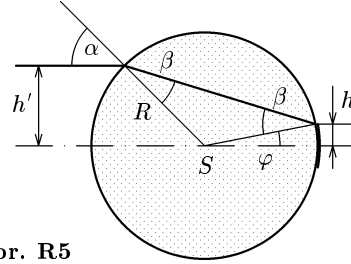
$$\beta \doteq \frac{\alpha}{n}, \quad \sin \varphi \doteq \varphi \doteq \alpha \left(\frac{2}{n} - 1 \right), \quad h \doteq R\alpha \frac{2-n}{n}, \quad h' \doteq R\alpha \doteq h \frac{n}{2-n}.$$

Zdánlivá tloušťka čáry je $2h'$. Pro daný index lomu $2h' \doteq 3,2 \cdot 2h$.

6 bodů



Obr. R4



Obr. R5

4. a) Mřížka sodíku je prostorově centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 2$ atomy. Z úhlopříčného řezu elementární buňky (obr. R6) odvodíme

$$a\sqrt{3} = 4r, \quad a = r \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad V_0 = \frac{64}{\sqrt{27}} \cdot r^3.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{2 \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{27}} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} \doteq 0,680.$$

Mřížka stříbra je plošně centrovaná. Na jednu elementární buňku připadají $N = 4$ atomy. Z obr. R7 odvodíme

$$a\sqrt{2} = 4r, \quad a = r \frac{4}{\sqrt{2}}, \quad V_0 = \frac{64}{\sqrt{8}} \cdot r^3.$$

Koeficient zaplnění je

$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{4 \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{64}{\sqrt{8}} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0,740.$$

Na jednu hexagonální elementární buňku hořčíku připadá $N = 6$ atomů. Středů sousedních atomů leží ve vrcholech pravidelného čtyřstěnu (obr. R8). Z toho odvodíme:

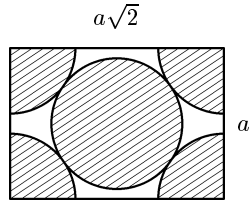
$$a = 2r, \quad c = 4r \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad V_0 = 24\sqrt{2} \cdot r^3.$$

Koeficient zaplnění je

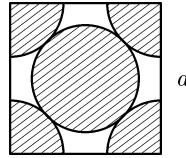
$$f = \frac{V}{V_0} = \frac{6 \frac{4}{3} \pi r^3}{24\sqrt{2} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \doteq 0,740,$$

což je stejná hodnota jako u stříbra a větší než u sodíku.

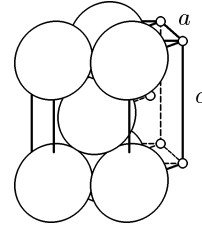
5 bodů



Obr. R6



Obr. R7



Obr. R8

- b) Průměrná hustota látky v krystalu je $\rho = \frac{NA_r m_u}{V_0}$. Z toho určíme objem elementární buňky:

$$V_0 = \frac{NA_r m_u}{\rho}$$

Pro sodík dostaneme:

$$R_{\text{Na}}^3 = \frac{3\sqrt{3}}{64} \cdot \frac{2 \cdot 22,99 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{971} \text{ m}^3, \quad R_{\text{Na}} = 1,85 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Pro stříbro dostaneme:

$$R_{\text{Ag}}^3 = \frac{\sqrt{2}}{32} \cdot \frac{4 \cdot 107,87 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{10\,500} \text{ m}^3, \quad R_{\text{Ag}} = 1,44 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Pro hořčík dostaneme:

$$R_{\text{Mg}}^3 = \frac{1}{24\sqrt{2}} \cdot \frac{6 \cdot 24,305 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27}}{1\,740} \text{ m}^3, \quad R_{\text{Mg}} = 1,60 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

5 bodů

5. a) Urychlením získal deuteron kinetickou energii $E_k = 15 \text{ MeV} = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ J}$. Klidová energie deuteronu je $E_0 = m_0 c^2 = 3,0 \cdot 10^{-10} \text{ J} = 1880 \text{ MeV} \doteq 125 E_k$. Hmotnost urychleného deuteronu je $m = m_0 + \frac{E_k}{c^2} \doteq 1,008 m_0$. Během urychlení se zvětší o 0,8 %, což můžeme při přibližném výpočtu zanedbat.

1 bod

- b) Zakřivení trajektorie je způsobeno dostředivou magnetickou silou. Pro částici o náboji e a hmotnosti m_0 platí:

$$Bev = \frac{m_0 v^2}{r}, \quad \frac{v}{r} = 2\pi f_0 = \frac{Be}{m_0}, \quad f_0 = \frac{Be}{2\pi m_0} = 1,07 \cdot 10^7 \text{ Hz}.$$

2 body

- c) Během jednoho oběhu je deuteron urychlen dvakrát. V optimálním případě je počet oběhů

$$N = \frac{E_k}{2U_{\text{m}e}} = \frac{15 \text{ MeV}}{0,32 \text{ MeV}} \doteq 47.$$

1 bod

d) Podle představ klasické fyziky:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0}} = 3,79 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad r_0 = \frac{m_0 v}{Be} = \frac{\sqrt{2E_k m_0}}{Be} = 0,565 \text{ m}.$$

2 body

e) Relativistickým výpočtem dostaneme pro konečnou rychlost deuteronu, poloměr poslední kružnice a konečnou frekvenci obíhání:

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^2} = c \sqrt{1 - \left(\frac{m_0}{m_0 + \frac{E_k}{c^2}}\right)^2} = 3,77 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

$$r = \frac{mv}{Be} = 0,566 \text{ m} \quad f = \frac{Be}{2\pi m} = \frac{Be}{2\pi m_0} \frac{m_0}{m} = f_0 \frac{m_0}{m} = 0,992 f_0 = 1,06 \cdot 10^7 \text{ Hz}.$$

Hodnoty získané relativistickým výpočtem se téměř neliší od výsledků získaných v b) a d). Nejzávažnější je postupný pokles frekvence obíhání až o 0,8 %. Optimální průběh urychlení předpokládaný v úloze c) se proto nedá realizovat a skutečný počet oběhů bude vždy větší než 47.

4 body

6. Energie kondenzátoru po překmitnutí obvodu je téměř rovna součtu energie kondenzátoru a cívky před rozepnutím spínače:

$$\frac{1}{2} C U_2^2 \doteq \frac{1}{2} C U_1^2 + \frac{1}{2} L I^2, \quad L = \frac{C (U_2^2 - U_1^2)}{I^2}.$$

Indukčnost cívky 1200 závitů z rozkladného transformátoru s uzavřeným jádrem je přibližně 1,6 H, s rovným jádrem 0,2 H.

7. a) Pro výpočet polohy těžiště umístíme kužel podle obr. R9 a řezy rovnoběžnými s podstavou jej rozdělíme na tenké kruhové vrstvy o poloměru y a tloušťce dx .

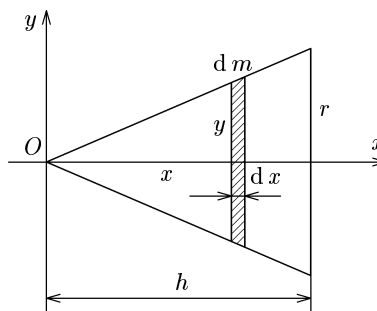
Meridián kužele je popsán funkcí

$$y = \frac{r}{h} x, \quad x \in [0, h].$$

Souřadnici těžiště určíme integrací:

$$dm = \rho \pi y^2 dx, \quad m = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

$$x_T = \frac{1}{m} \int_0^m x dm.$$



Obr. R9

Po dosazení:

$$x_T = \frac{\int_0^h \rho \pi \left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx \cdot x}{\rho \frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{3}{h^3} \int_0^h x^3 dx = \frac{3}{4} h = 0,150 \text{ m}.$$

3 body

b) Ze stejného obrázku vyjdeme i při určení momentu setrvačnosti. Platí:

$$dJ = \frac{1}{2} dm \cdot y^2 = \frac{1}{2} \rho \pi y^4 dx = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{r}{h}\right)^4 x^4 dx,$$
$$J = \frac{\rho \pi r^4}{2h^4} \int_0^h x^4 dx = \frac{1}{10} \rho \pi r^4 h = \frac{3}{10} mr^2 = 9,00 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

3 body

c) Koncový bod vektoru momentu hybnosti \mathbf{L} obíhá po kružnici o poloměru $L \sin \vartheta$.
Platí:

$$d\mathbf{L} = \mathbf{M} dt, \quad L \sin \vartheta \Omega dt = mg \cdot \frac{3}{4} h \sin \vartheta dt, \quad L = \frac{3}{10} mr^2 \omega,$$
$$\Omega = \frac{5hg}{2\omega r^2} = 1,23 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

4 body