

Řešení úloh 1. kola 39. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie D

Autoři úloh: J. Jírů (1, 2, 3, 4, 6, 7) a I. Volf (5)

- 1.a) Graf *A* představuje klid hmotného bodu s počáteční uraženou dráhou 10 m, graf *B* rovnoměrný pohyb s počáteční uraženou dráhou 4 m, graf *C* rovnoměrný pohyb s nulovou počáteční dráhou a graf *D* rovnoměrně zrychlený pohyb s nulovou počáteční dráhou a nulovou počáteční rychlostí.

2 body

- b) Průměrná rychlost v_p je určena podílem uražené dráhy a odpovídajícího časového intervalu 4 s:

$$A: v = 0, \quad B: v = 1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}, \quad C: v = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad D: v = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

2 body

- c) V případech *A*, *B*, *C* je okamžitá rychlost v stálá a v každém okamžiku má stejnou hodnotu jako průměrná rychlost v_p ve zvoleném časovém intervalu.

$$\text{V případě } D \text{ platí } v = at, \quad s = \frac{1}{2}at^2, \quad \text{z čehož } v = \frac{2s}{t}.$$

Po dosazení hodnot $s = 10 \text{ m}$, $t = 4 \text{ s}$ dostaneme $v = 5,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2 body

- d) Grafy jsou na obr. R1.

2 body

- e) *A*: Těleso je stále v klidu, tedy $s = s_1 = 10 \text{ m}$.

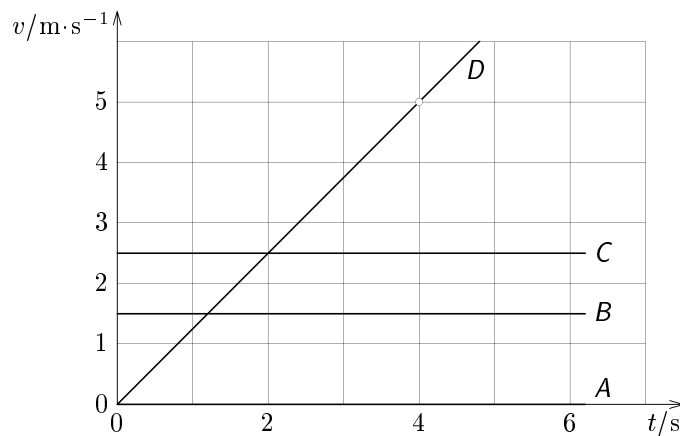
$$B: \text{Podle rovnice } s_1 = s_0 + vt_1 = (4 + 1,5 \cdot 9,2) \text{ m} = 17,8 \text{ m}.$$

$$C: \text{Podle rovnice } s_1 = vt_1 = 2,5 \cdot 9,2 \text{ m} = 23,0 \text{ m}.$$

$$D: \text{Z grafu lze určit } a = \frac{2s}{t^2} = 2 \cdot \frac{10}{4^2} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 1,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}.$$

$$\text{Uražená dráha pak je } s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,25 \cdot 9,22 \text{ m} = 52,9 \text{ m}.$$

2 body



Obr. R1

2.a)

$$t_0 = \frac{d_0}{v_0} + \frac{d_1}{v_1} = 125 \text{ s.}$$

2 body

b)

$$t_1 = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2}}{v_1} = 146 \text{ s.}$$

2 body

c) Z rovnosti $t_0 = t_1$, kde rychlost v_1 nahradíme rychlostí v'_1 , plyne

$$v'_1 = \frac{\sqrt{d_0^2 + d_1^2} - d_1}{d_0} v_0 = 20,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

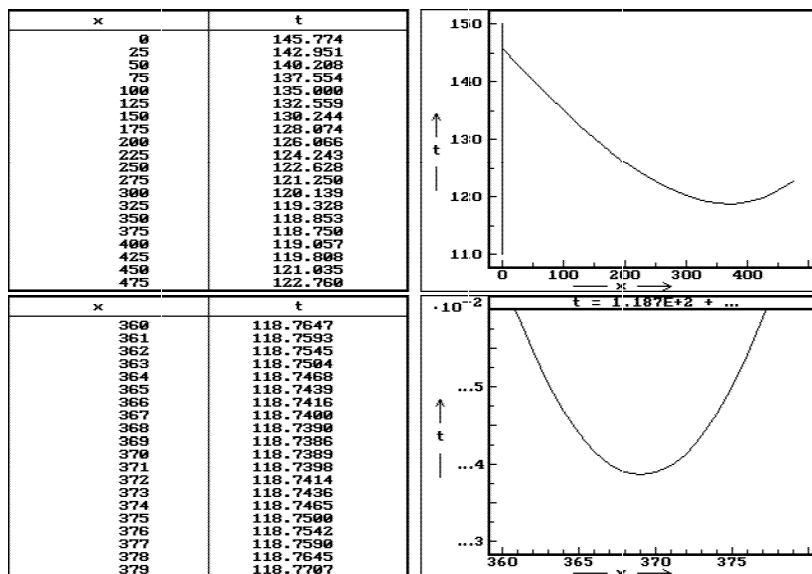
2 body

d) Označme $x = |AX|$. Pak z obr. 2 plyne

$$t_x = \frac{x}{v_0} + \frac{\sqrt{(d_0 - x)^2 + d_1^2}}{v_1}, \quad \text{kde} \quad 0 \leq x \leq d_0.$$

Rozdělením úsečky AB na 20 dílů po 25 m a numerickým výpočtem pro takto zvolené polohy bodu X dostáváme, že nejkratší čas po trase AXC je přibližně $t_x \doteq 118,75$ s pro $x \doteq 375$ m. Dalším zpřesněním výpočtu lze určit minimum výše uvedené funkce $t_x = 118,7386$ s pro $x = 369$ m (viz obr. R2 a R3). Vzhledem k omezené přesnosti zadání však výsledek zaokrouhlíme na $x \doteq 370$ m, $t_x \doteq 119$ s.

4 body



Obr. R2, R3

- 3.a) Z rovnic $s = \frac{1}{2}at^2$, $v = at$ pro rovnoměrně zrychlený pohyb z klidu plyne

$$s_1 = \frac{1}{2}v_1 t_1 = 45 \text{ m.} \quad \mathbf{2 \text{ body}}$$

- b) Z 2. pohybového zákona plyne $F = ma = \frac{mv_1}{t_1} = 3000 \text{ N.}$

1 bod

- c) Průměrný výkon automobilu je určen podílem vykonané práce automobilu při rozjždění a dobou rozjždění:

$$P_p = \frac{\frac{1}{2}mv_1^2}{t_1} = 22,5 \text{ kW.}$$

2 body

- d) Okamžitý výkon automobilu v čase t_1 určíme jako součin síly a okamžité rychlosti:

$$P_1 = Fv_1 = \frac{mv_1}{t_1}v_1 = \frac{mv_1^2}{t_1} = 45 \text{ kW} (= 2P_p).$$

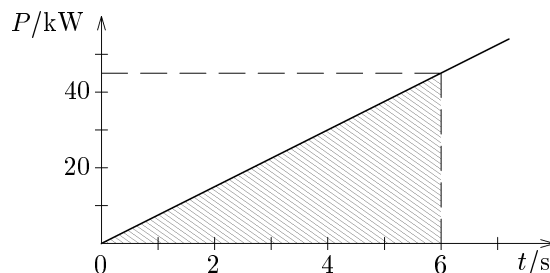
2 body

- e) Okamžitý výkon automobilu jako funkci času určíme ze vztahu

$$P = Fv = \frac{mv_1}{t_1} \cdot at = \frac{mv_1}{t_1} \cdot \frac{v_1}{t_1}t = \frac{mv_1^2}{t_1^2}t.$$

Mezi číselnými hodnotami platí vztah: $\{P\} = 7500\{t\}$.

Graf:



Obsah plochy omezené grafem v intervalu od 0 do t_1 udává práci vykonanou motorem automobilu a tedy i kinetickou energii automobilu.

3 body

- 4.a) Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ plyne

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = 2,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0,032.$$

3 body

- b) Ze zákona zachování hybnosti $m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$ plyne

$$v = \frac{|m_1v_1 - m_2v_2|}{m_1 + m_2} = 1,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1v_1 - m_2v_2)^2}{(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0,80.$$

3 body

- c) Ze zákona zachování hybnosti $(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2 = [(m_1 + m_2)v]^2$ plyne

$$v = \frac{\sqrt{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}}{m_1 + m_2} = 1,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Hledaný poměr energií je

$$k = 1 - \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)} = 1 - \frac{(m_1v_1)^2 + (m_2v_2)^2}{(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)(m_1 + m_2)} = 0,42.$$

4 body

- 5.a) Během výstupu míčku se jeho okamžitá výška h nad terénem a velikost v okamžité rychlosti mění podle vztahů:

$$h = h_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v = v_0 - gt.$$

V okamžiku, kdy míček dosáhne největší výšky h_m , je jeho rychlost nulová,

$$v_0 - gt = 0 \text{ a tedy } t = \frac{v_0}{g} = 1,63 \text{ s}.$$

Po dosazení

$$h_m = h_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 25 \text{ m}.$$

2 body

- b) Při následném pádu míčku z výšky h_m se velikost rychlosti a dráha míčku mění podle vztahů:

$$v = gt, \quad s = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}.$$

V okamžiku dopadu $s = h_m$. Míček dopadne za dobu $t = \sqrt{\frac{2h_m}{g}} = 2,26$ s rychlostí $v = \sqrt{2gh_m} = 22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **2 body**

- c) Při vodorovném vrhu je doba letu stejná jako doba volného pádu z výšky h_0 . Po tuto dobu se míček pohybuje ve vodorovném směru rychlostí v_0 . Tedy:

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}, \quad d = v_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 25 \text{ m}.$$

Rychlost míčku při dopadu má velikost $v = \sqrt{v_0^2 + v_p^2}$, kde $v_p = \sqrt{2gh_0}$ je rychlost dopadu při volném pádu z výšky h_0 .

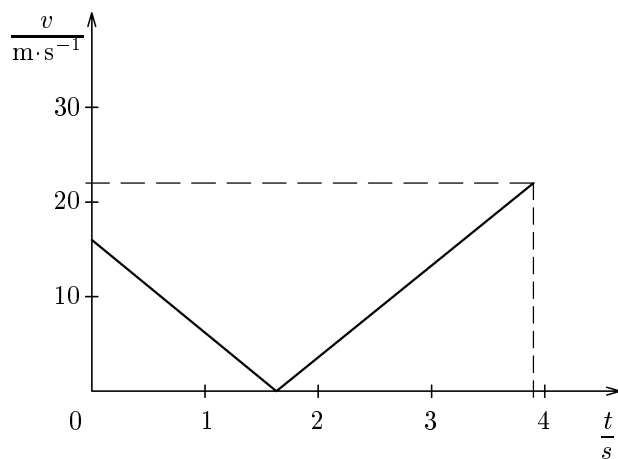
Po dosažení: $v_p = 15,3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $v = 22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Velikost rychlosti dopadu je stejná jako v případě b).

To vysvětlíme pomocí zákona zachování energie. Terén volíme jako nulovou hladinou potenciální energie. Součet potenciální a kinetické energie míčku na počátku pohybu je roven kinetické energii míčku při dopadu:

$$mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{2gh_0 + v_0^2} = 22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad \mathbf{3 \text{ body}}$$

- d) Také při svislém vrhu dolů můžeme použít zákon zachování energie a dojdeme ke stejnému výsledku $v = \sqrt{2gh_0 + v_0^2} = 22 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. **1 bod**

e)



2 body

7.a) Hydrostatický tlak působící na dno akvária je $p = h\rho g$, kde

$$h = \frac{V}{ab} \quad (1)$$

je hloubka vody v akváriu. (Pro dané hodnoty musí ovšem platit $h < c$.)
Dosazením dostaneme

$$p = \frac{V\rho g}{ab} = 3140 \text{ Pa}. \quad (2)$$

Tlaková síla působící na dno je $F = pab = V\rho g = 471 \text{ N}$. **3 body**

b) Hydrostatický tlak působící na boční stěny závisí na hloubce pod hladinou vody. Bezprostředně u hladiny je nulový, bezprostředně u dna je roven hydrostatickému tlaku na dno, přičemž s hloubkou roste přímo úměrně a šířka stěny je všude stejná. Střední tlak p_s působící na stěny je proto roven polovině hydrostatického tlaku působícího na dno, tj.

$$p_s = \frac{V\rho g}{2ab} = 1570 \text{ Pa}.$$

Tlaková síla působící na stěnu šířky a je $F_a = p_s ah$, na stěnu šířky b pak $F_b = p_s bh$. Dosazením za $p_s = p/2$, kde p je určeno rovnicí (2), a za h z rovnice (1), pak dostáváme

$$F_a = \frac{V^2\rho g}{2ab^2} = 251 \text{ N},$$

$$F_b = \frac{V^2\rho g}{2a^2b} = 151 \text{ N}.$$

5 bodů

c) Podle Archimédova zákona je vztlaková síla působící na loď $F_{vz} = mg = \rho V_2 g$, z čehož $V_2 = \frac{m}{\rho}$ je objem ponořené části plovoucí lodi. Hledaný objem dolité vody je

$$V_1 = abc - \left(V + \frac{m}{\rho} \right) = 11,1 \text{ l}.$$

2 body